This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

6406.2

HARVARD
COLLEGE
LIBRARY

TRANSFERRED TO
FINE ARTS LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

# ÉLÉMENTS

DE

# PERSPECTIVE LINÉAIRE.

Digitized by Google

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

Digitized by Google

# ÉLÉMENTS

DE

# PERSPECTIVE LINÉAIRE,

COMPRENANT

LA THÉORIE ET LES PROCÉDÉS PRATIQUES DE CETTE SCIENCE,

avec

UN GRAND NOMBRE DE PROBLÈMES NUMÉRIQUES ET D'APPLICATIONS USUELLES,
LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
ET DES NOTIONS SUR LES ORDRES D'ARCHITECTURE;

PAR AUGUSTE GUIOT,

Docteur ès sciences, agrégé de l'Université, professeur de mathématiques pures et appliquées.

*DEUXIÈME ÉDITION.*

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1847

Digitized by Google

FA 6406.2

362.5

Digitized by Google

# PRÉFACE.

Parmi les applications si variées de la Géométrie, il n'en est pas de plus attrayante que la Perspective linéaire. Indépendamment de ses usages essentiels dans un art plein de charmes, elle captive l'imagination par le but immédiat de ses problèmes, elle exerce en même temps la pénétration du jugement, et réalise ainsi l'heureuse alliance de l'utile et de l'agréable. Un sujet aussi intéressant devait donner naissance à de nombreux ouvrages; et, par cette raison même, j'aurais laissé dans les cartons le résultat d'un travail entrepris pour l'enseignement privé, si en l'exécutant j'avais suivi les errements de mes devanciers. Je dois indiquer sur quels points je m'en suis plus particulièment écarté.

La perspective linéaire, partie intégrante de l'art de la peinture, a été envisagée, de nos jours, comme une science du domaine exclusif des géomètres. De là, des traités, ou plutôt des atlas, remarquables par la profusion des lignes et le luxe des constructions géométriques, mais n'offrant guère en définitive, sous l'apparence d'applications plus ou moins spéciales, que d'assez vagues généralités. Certains ouvrages de date moins récente, d'un mérite relatif à leur époque, pèchent par le défaut opposé et tombent dans l'empirisme. La plupart des autres, si recommandables qu'ils puissent être par les noms de leurs auteurs, se bornent

Digitized by Google

à des notions usuelles et s'adressent aux personnes étrangères à la géométrie. Les premiers, du moins, renferment virtuellement les procédés usités dans la pratique de l'art auquel on doit les supposer destinés; mais j'ai pensé que ces procédés eux-mêmes pouvaient recevoir, sous certains rapports, d'utiles innovations. A cet égard, de courtes explications sont nécessaires.

Pour mettre en perspective des objets d'une position idéale et donnée mathématiquement, on conçoit plusieurs sortes de moyens; mais les plus ordinaires, et même les seuls en usage, consistent dans des opérations graphiques dites *géométrales*, parce qu'elles supposent les points de l'espace projetés sur des plans *géométraux*. Ces opérations étaient depuis assez longtemps pratiquées, sous une forme à la vérité moins explicite, lorsque Monge, réunissant en faisceau toutes les méthodes de même nature, leur donna un développement et une régularité qui leur manquaient, et créa la Géométrie descriptive.

Il serait hors de propos de discuter ici ce qu'avait de plus ou moins ingénieux la conception de cette réforme, corollaire si simple en apparence de celle que Descartes avait accomplie, en fondant sur une base nouvelle l'analyse géométrique. Je reconnais en tous cas la réalité et l'importance de ses services dans un certain nombre d'arts, tels que l'architecture, la mécanique industrielle, la topographie ou la fortification. Ces arts relèvent essentiellement des sciences exactes; ils imposent à leurs adeptes l'habitude des déductions de la géométrie, une manipulation journalière de la règle et du compas. Mais, je l'avoue, je me suis expli-

Digitized by Google

qué, en pratiquant la science de Monge, l'espèce de discrédit où l'on ne saurait se dissimuler qu'elle est tombée parmi les peintres de profession; j'en ai trouvé le motif dans la nature des opérations elles-mêmes, et plus encore peut-être dans une exposition défectueuse de leur théorie.

La résolution d'une question pratique de géométrie descriptive est, en effet, une chose plus complexe qu'elle ne le paraît au premier abord. C'est que, dans les traités élémentaires de cette science, on néglige les opérations accessoires, lesquelles l'emportent quelquefois, par leur multiplicité, sur les opérations principales. On semble oublier que le praticien doit transporter et réduire sur la feuille d'épure les projections des lignes conçues dans l'espace, en tenant compte, par des constructions préliminaires, des positions de ces lignes, de leurs inclinaisons mutuelles ou de celles des plans qui les contiennent; puis, le résultat de la construction générale obtenu, lui restituer les dimensions proportionnelles de l'espace. Le détail des opérations se complique particulièrement dans les problèmes spéciaux de perspective. Or, la description de ce réseau de lignes qui s'enchevêtrent sur l'épure exige une précision extrême, et suppose une aptitude que n'excluent pas sans doute les plus brillantes qualités d'un artiste, mais qui ne se rencontre pas toujours avec elles.

D'une autre part, les théoriciens se renferment trop souvent dans des abstractions et dans une certaine uniformité d'hypothèses qui sont loin de s'accorder avec les conditions réelles des problèmes de la pra-

Digitized by Google

tique. Ce fut assurément une idée heureuse que celle qui introduisit ou régularisa l'emploi des plans de projections, pour en faire sortir la solution de tout problème de géométrie dans l'espace. Mais encore faut-il, quand on en vient aux applications, savoir faire le choix le plus judicieux de ces plans, comprendre comment ils ne sont qu'un moyen pour arriver à un but, un instrument qui doit sans cesse se plier à la nature particulière du travail. Car tel est l'esprit de la méthode, qu'en soumettant ses procédés à une marche uniforme, on s'expose à en donner l'idée la plus fausse en théorie, et l'on restreint précisément dans la pratique le caractère de généralité qui lui est propre.

Frappé de ces inconvénients, j'ai cherché à les éviter dans l'essai que j'ai offert au public, et je suis encouragé à persévérer par les honorables suffrages accordés au résultat de mes efforts. Le corps du texte se divise en deux sections, dont la première contient les principes généraux et une sorte de synthèse de la science; on y trouvera des exercices destinés à rendre familières ces idées fondamentales. La seconde traite des applications pratiques d'après la méthode suivante.

Les points de l'espace étant rapportés explicitement à un système de trois plans rectangulaires, se croisant par l'œil du spectateur, et ceux du tableau à deux axes déterminés par deux de ces plans, les constructions géométrales ont pour unique but de faire connaître les distances métriques des premiers points aux trois plans, distances que je nomme *coordonnées aériennes*. Les *coordonnées perspectives* se concluent des précédentes par un calcul fort simple, et servent à assigner

Digitized by Google

la position de chaque point sur le tableau, d'après ses distances aux deux axes. Cette manière d'opérer est fondée sur les principes les plus élémentaires de la théorie. Voici les avantages qu'elle présente dans la pratique.

La construction géométrale se trouve simplifiée et devient d'autant plus exacte, qu'étant dégagée de la perspective, elle s'exécute sur une plus grande échelle.

Ne cherchant à obtenir sur l'épure que les valeurs absolues des coordonnées aériennes mesurées sur des lignes de positions quelconques, on dispose plus arbitrairement des plans verticaux de projections, dont l'emploi est si fréquent.

On peut exécuter sur plusieurs épures distinctes les opérations qui en surchargeraient une seule. Les points obtenus ainsi séparément, mais rapportés tous aux mêmes plans dans l'espace et aux mêmes axes sur le tableau, prendront toujours en perspective les positions qui leur conviennent.

Dans beaucoup de questions pratiques, la position des points de l'espace par rapport aux plans coordonnés est connue à priori, ou facile à conclure des données primitives, comme cela peut arriver pour toutes les parties d'un édifice dont les faces sont parallèles ou perpendiculaires au tableau. La méthode dispense alors de toute opération graphique.

L'artiste peintre est libre de faire un tracé provisoire de la perspective réduite, ou de la porter immédiatement sur la toile dans ses vraies dimensions. Il pourra, dans les deux cas, commencer par prendre note sur un calepin des valeurs calculées pour un cer-

Digitized by Google

tain groupe de points, et construire ensuite leurs perspectives en faisant courir une équerre graduée sur l'un des axes du tableau, de même qu'il aura pris sur l'épure les valeurs des coordonnées aériennes.

Enfin, pour tout praticien, c'est déjà un avantage que d'éviter la monotonie des lignes et d'introduire un peu de variété dans la forme et la nature de ses opérations.

Cependant, en conservant l'emploi des coordonnées, j'indique d'une manière générale la méthode exclusivement graphique, et ne refuse pas de l'admettre, dans certains cas, en concurrence avec la précédente.

Les problèmes qui ont le plus de charmes pour les élèves sont ceux dont les éléments et les solutions à obtenir sont donnés avec la précision des nombres. J'en ai répandu beaucoup dans cette seconde section, d'autant plus qu'ils s'adressent également, par leurs résultats définitifs, aux partisans des méthodes les plus diverses. Pour chacun d'eux, les coordonnées de l'espace, aussi bien que celles du tableau, ont été déterminées par voie de calcul et soigneusement vérifiées. La corrélation de ces valeurs fournit d'ailleurs des moyens faciles de les contrôler. Des problèmes de ce genre, dans la perspective, sont une innovation dont l'idée se présentait naturellement à la suite de la méthode que j'avais adoptée: je ne m'en attribue donc aucun mérite, mais cette partie de mon travail a eu réellement toute ma prédilection.

Les jeunes émules d'Euclide qui, dédaignant le compas, voudraient aussi opérer sans autre instrument que le calcul, trouveraient de quoi s'exercer. Ils auraient à combiner intellectuellement des lignes et

Digitized by Google

des surfaces, et à faire usage, selon les circonstances, des formules de l'application de l'Algèbre. Ces exercices, dirigés vers un but d'utilité sensible, n'auraient pas la sécheresse des abstractions de l'enseignement théorique, et je n'imagine pas qu'il y en eût de plus fructueux pour les études; ce serait une troisième méthode, participant des considérations de la géométrie pure et des procédés de l'analyse cartésienne.

L'exactitude illimitée que le calcul numérique peut atteindre établit encore en sa faveur une incontestable supériorité, quand il s'agit surtout d'études rationnelles. Les résultats obtenus à l'aide de ce puissant instrument peuvent être discutés avec certitude : ils accusent ces accidents de la courbure des surfaces, ou des lignes de contour, qui échappent par leur délicatesse aux opérations graphiques, et ils sont quelquefois de nature à donner une nouvelle sanction aux propriétés de la théorie. Cette dernière remarque trouvera sa justification dans plusieurs exemples.

Sans prétendre réformer le vocabulaire, je me suis permis un petit nombre de néologismes, ou du moins l'emploi de quelques mots techniques encore inusités dans les traités de perspective. Autant que possible, je les ai assortis aux idées qu'ils devaient exprimer. On en jugera en parcourant la page 495 et les parties du volume auxquelles elle se réfère.

L'arithmétique et les premiers éléments de géométrie sont les seules connaissances que je suppose d'abord acquises au lecteur. J'ai ajouté dans un Appendice les principes de géométrie descriptive nécessaires pour la seconde section de l'ouvrage, mais appropriés

Digitized by Google

au but que je viens d'exposer, et j'ai cherché surtout à faire ressortir, dans toute sa simplicité, le véritable caractère de leurs applications.

Une Note sur les approximations dans les calculs numériques, s'appliquant spécialement aux opérations pratiques de perspective, et quelques détails sur les ordres d'architecture, où les éléments sont évalués en parties décimales du module, terminent ce complément de la tâche que je m'étais proposée.

Je rends hommage au talent si distingué de l'artiste (M. Wormser) qui m'a prêté le secours de son burin. Un ouvrage sur la perspective emprunte nécessairement une partie de sa valeur à la bonne exécution des planches. Cependant, ici comme dans le texte, en m'attachant à l'exactitude, j'ai recherché la simplicité. On comprendra d'ailleurs, en parcourant l'atlas, que les objets de diverse nature choisis pour exemples ont été d'abord réduits à des figures géométriques rudimentaires, celles qui se prêtaient le mieux à la rigueur du calcul ou des constructions. Au reste, mon ambition se trouvera satisfaite si, à défaut du brillant de la forme, on continue à reconnaître que le fond peut être utile.

Digitized by Google

# TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Notions générales et définitions..... 1

PREMIÈRE SECTION.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE.

§ I. Des lignes droites en perspective..... 7
Suite de théorèmes..... 7...28
Évaluation perspective de la dépression de l'horizon visuel..... 29
Table des rayons d'horizons visuels..... 33
§ II. Des polygones et des lignes courbes en perspective..... 35
Remarques particulières sur la perspective d'un cercle..... 39...45
§ III. Des polyèdres et des surfaces courbes en perspective..... 45
Remarques sur la perspective des surfaces courbes les plus usuelles..... 48...59

*Des accidents de la lumière à la superficie des objets.*

§ I. Des ombres propres et des ombres portées..... 60
§ II. Des images réfléchies et des reflets de lumière... 68

*Exercices théoriques.*

Vingt-six problèmes et un théorème servant à récapituler et compléter les principes de la théorie.. 77...104

Digitized by Google

## SECONDE SECTION.

### APPLICATIONS PRATIQUES.

Pages.

*Quelques mots sur la copie d'après nature*..... 105
*De la composition*..... 115
§ I. Mise en perspective d'un point. Définition et usage des coordonnées..... 116
Méthode par le calcul..... 118
Méthode graphique..... 121
Comparaison des deux méthodes..... 124
Problème inverse de la mise en perspective d'un point..... 125
Des constructions géométrales..... 126
§ II. Mise en perspective d'une droite. Conventions sur la manière de fixer sa direction..... 128
Divers exemples..... 132...135
Détermination du point accidentel d'une droite.... 136
Division perspective d'une droite..... 137
§ III. Mise en perspective d'un polygone..... 139
Un carré horizontal..... 142
Un rectangle horizontal..... 143
Un pentagone incliné sur l'horizon..... 144
Polygones réguliers et leurs assemblages..... 145
§ IV. Mise en perspective d'une courbe plane..... 150
Un cercle parallèle au tableau..... 152
Un cercle horizontal..... 152
Un cercle vertical..... 156
Un cercle incliné sur l'horizon..... 158
Une volute..... 161
§ V. Mise en perspective d'une surface polyédrique.. 163
Un parallélipipède horizontal..... 164
Un parallélipipède incliné sur l'horizon..... 165
Un édifice..... 168
Un pavillon avec fenêtres de mansardes..... 169
Un édifice surmonté d'un pavillon..... 172

Digitized by Google

Pages.
Une tour octogonale traversant un toit..... 175
Un escalier conduisant à une terrasse..... 178
Un escalier en terre-plein..... 181
Un pont à piles droites..... 183
Un moulin à vent à ailes planes..... 186
Un tétraèdre régulier..... 191
Un octaèdre régulier..... 192
Un dodécaèdre régulier..... 193
Un icosaèdre régulier..... 197
Un pont avec des arches à plein cintre..... 200
Un édifice surmonté d'un dôme..... 203
Le même édifice dans une autre position..... 206
§ VI. Mise en perspective d'une surface courbe..... 208
Méthodes pour les diverses espèces de surfaces, savoir :
Cônes et cylindres..... 209
Surfaces non réglées..... 214
Surfaces gauches..... 223
Un cône vertical..... 224
Un autre cône vertical..... 226
Un cône horizontal..... 227
Un cône incliné sur l'horizon..... 228
Un tronc de cône..... 230
Un tronc de cylindre..... 231
Une tourelle..... 235
Un treuil..... 238
Un télescope..... 240
Une charrette couverte..... 243
Une sphère..... 251
Un tore..... 254
Une base de colonne..... 259
Une table ronde..... 262
Un vase..... 265
Une colonne..... 270
Un paraboloïde hyperbolique..... 274
Un assemblage de deux paraboloïdes..... 279

Digitized by Google

Pages.

Un paraboloïde hyperbolique vu de profil..... 282
Un moulin à vent à surfaces gauches..... 286
Un hyperboloïde à une nappe, de révolution..... 289
Un héliçoïde gauche..... 292
Un escalier en vis à jour..... 296
Une vis à filet triangulaire..... 300
Une autre vis de même espèce..... 302
§ VII. Mise en perspective des courbes à double courbure..... 306
Intersection de deux cylindres horizontaux..... 308
Un cône vertical pénétré par un cylindre horizontal. 311
Intersection d'un cône et d'un cylindre verticaux.. 313
Un hémisphère pénétré par un cône et un cylindre. 315
Une pièce d'artillerie..... 319

*Applications de la théorie des ombres et des images réfléchies.*

§ I. Mise en perspective des ombres propres et des ombres portées..... 324
Ombre portée par un édifice..... 329
Ombre portée par un pavillon..... 331
Ombre portée par le pavillon avec fenêtres du n° **128**..... 334
Ombre portée par un édifice avec ses cheminées... 336
Ombre portée par la tourelle du n° **135**..... 340
Ombre intérieure d'une niche..... 344
Ombre portée par une sphère sur une autre sphère et sur le sol..... 346
Ombre portée par la base de colonne du n° **138**.... 350
§ II. Mise en perspective des images réfléchies. .... 355
Image d'un pupitre dans une glace..... 356
La table ronde du n° **140**, et son image dans une glace..... 358
Images d'une pendule dans deux glaces..... 360
L'édifice du n° **129**, et son image dans une eau tranquille..... 364

Digitized by Google

Pages.

*De quelques anciennes méthodes de perspective linéaire* . . . . . 366
Méthode du treillis . . . . . 367
Méthode du châssis perspectif . . . . . 369
*Des simplifications à introduire dans les applications pratiques* . . . . . 371
Un édifice avec pourtour en arcades et colonnes de l'ordre dorique . . . . . 378
Un édifice décoré de colonnes et d'un fronton de l'ordre ionique . . . . . 384
Intérieur d'une chambre . . . . . 390
Intérieur d'une basilique . . . . . 394
Un paysage . . . . . 402

---

## APPENDICE.

### PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Notions préliminaires . . . . . 405
Problèmes sur la ligne droite et le plan . . . . . 412
Intersections de surfaces courbes par des plans . . . . . 423
Intersections d'une ligne et d'une surface courbe . . . . . 433
Intersections mutuelles des surfaces courbes . . . . . 434
Point d'intersection de trois surfaces . . . . . 441
Plans tangents aux surfaces courbes . . . . . 441
Tangentes aux courbes d'intersection et aux lignes à double courbure . . . . . 448
NOTE SUR LES APPROXIMATIONS DANS LES CALCULS NUMÉRIQUES APPLIQUÉS AUX OPÉRATIONS DE PERSPECTIVE . . . . . 451



Digitized by Google

## NOTIONS SUR LES ORDRES D'ARCHITECTURE.

Pages.
Définitions..... 467
Ordre toscan..... 469
Ordre dorique..... 471
Ordre ionique..... 474
Ordre corinthien..... 479
Ordre composite..... 485
Notions complémentaires..... 490
Termes techniques employés dans les éléments de perspective..... 493

FIN DE LA TABLE.

Digitized by Google

# *ERRATA.*

Page 10, ligne 4, *fig.* 52, *lises fig.* 60.

Page 89, ligne 4 en remontant, $0^m,1092$, *lises* $1^m,092$.

Page 90, ligne 14 en remontant, un objet vertical, *ajoutes* situé dans le même plan.

Page 159, ligne 12, culminants, *lises* latéraux.

Page 230, ligne 3, $\begin{cases} x = 517 \\ y = -234 \end{cases}$ *lises a* $\begin{cases} x = 517 \\ y = -234 \end{cases}$.

Page 246, ligne 21, $O\zeta$, *lises* $O\xi$.

Page 246, ligne 24, $\lambda\omega\zeta$, *lises* $\theta\omega\zeta$.

Page 261, ligne 20, $y = -798$, *lises* $y = -531$.

Page 266, ligne 21, AG, *lises* BG.

Page 266, ligne 7 en remontant, G et M, *lises* G et I.

Page 275, ligne 13 en remontant, plan vertical qui projette $J_1K_1$, *lises* plan qui projette $(J_1K_1, J'K')$.

Page 345, ligne 7 en remontant, $Y = -0,486$, *lises* $Y = -0,386$.

Page 346, ligne 3, $g_1$ $\begin{cases} x = 251 \\ y = -114 \end{cases}$ *lises* $g_1$ $\begin{cases} x = 241 \\ y = -111 \end{cases}$.

Page 346, ligne 6, $y = -76$, *lises* $y = -60$.

Page 358, ligne 9 en remontant, les projections horizontales C et D, *lises* la projection horizontale C et la projection verticale D'.

Page 427, ligne première en remontant, les mêmes droites, *lises* les limites de la projection verticale.

Page 428, ligne 14, CG et DH, *lises* CJ et DK.

Digitized by Google

Digitized by Google

# ÉLÉMENTS

DE

# PERSPECTIVE LINÉAIRE.

## NOTIONS GÉNÉRALES ET DÉFINITIONS.

1. On sait que, d'après la théorie du phénomène de la vision, l'œil d'un spectateur, placé en présence d'objets quelconques, est le point de concours d'une infinité de rayons de lumière émis ou renvoyés par les divers points de leur superficie. Entre l'œil et les objets faisons intervenir une toile ou surface plane verticale, tellement diaphane qu'elle livre passage à tous les rayons : évidemment, rien ne sera changé pour les impressions du spectateur. Mais, comme ces impressions sont produites uniquement par l'action des rayons sur la rétine, elles subsisteraient encore, si dans un instant donné la toile devenait opaque, en conservant la trace et la couleur de chacun des rayons qui la traversaient. L'œil serait affecté par les rayons émanant des points de la toile, comme il l'était par ceux qui arrivaient, suivant les mêmes directions, des points correspondants de l'espace.

Or, dans une telle hypothèse, chaque point de la toile est la *perspective* du point correspondant, et chaque ligne est celle de la ligne correspondante de l'espace. L'ensemble des lignes déterminées ainsi sur la toile par les contours



Digitized by Google

apparents ou les lignes remarquables des objets constitue leur *perspective linéaire;* et les traces colorées de tous les rayons, les teintes de diverses nuances qui en résultent, composent leur *perspective aérienne.* La position occupée par l'œil du spectateur, toujours considérée comme un simple point mathématique, se nomme le *point de vue.*

La toile peut d'ailleurs être située au delà d'une partie ou de la totalité des objets, et la perspective s'obtient par le prolongement inverse des rayons jusqu'à la rencontre de sa surface. Un cas seul doit être excepté, celui où les objets seraient en arrière du point de vue, ou d'un plan conçu par ce point parallèlement à la toile.

Enfin, au lieu d'une surface plane et verticale, rien n'empêche d'en supposer une de forme ou de position quelconque, et les définitions précédentes subsistent.

2. Il résulte de ces définitions que la perspective aérienne est une représentation des objets qui les fait apparaître, tels qu'ils sont dans la nature, aux yeux du spectateur placé au point de vue. Conçue comme nous l'avons supposé, elle n'est qu'une fiction : mais dans l'art de la peinture, on cherche à obtenir un résultat équivalent, par l'observation de certaines règles et l'emploi de certains procédés techniques, et un tel résultat prend le nom de *tableau.*

Quant à la perspective linéaire, c'est, en quelque sorte, un réseau qui reçoit dans ses mailles la perspective aérienne : elle précède celle-ci dans l'ordre des opérations exécutées matériellement sur la toile, et forme un élément essentiel de toute œuvre de peinture. Cependant, les lois qui régissent cette partie de l'art sont géométriques, parce qu'on y considère uniquement les formes, les dimensions et les positions respectives des objets, en faisant abstraction de leurs couleurs. Cette application de la Géométrie,

Digitized by Google

intéressante en elle-même, a son importance pratique : le dessinateur le plus habile à copier d'après nature y trouve un auxiliaire utile ; mais elle est surtout indispensable au peintre, pour l'ordonnance d'un tableau dont le sujet n'a d'existence que dans son imagination d'artiste. Avant d'en exposer les principes, j'ajouterai quelques définitions à ce qui précède.

3. Supposant généralement la toile, ou la surface du tableau, plane et verticale dans sa position relative aux objets, j'appellerai :

*Axe de perspective*, une perpendiculaire abaissée du point de vue sur le plan du tableau, et prolongée indéfiniment ;

*Centre de perspective*, le point où cette perpendiculaire rencontre le plan : c'est celui que, dans la plupart des Traités, on nomme le point de vue ;

*Plan central*, un plan parallèle au tableau et conçu par le point de vue, qui est aussi le *centre* de vision ;

*Plan d'horizon perspectif*, ou simplement plan d'horizon, un plan horizontal conçu par l'axe de la perspective, et *ligne d'horizon perspectif*, ou seulement *ligne d'horizon*, son intersection avec le plan du tableau : ainsi qu'on le verra par la suite (27), ce plan et cette ligne ne sont pas rigoureusement ceux qui se rapportent à l'horizon visuel d'un spectateur placé en rase campagne ;

*Plan normal*, un plan vertical conçu par l'axe de perspective, et *ligne normale* son intersection avec le plan du tableau ;

*Distance centrale*, la distance du point de vue ou du plan central au plan du tableau ;

*Point accidentel* d'une droite, le point où une parallèle à cette droite, menée par le point de vue, rencontre le plan du tableau. Le même point accidentel convient donc



Digitized by Google

à une infinité de droites, pourvu qu'elles soient parallèles. Le centre de perspective est, en particulier, le point accidentel de toutes les droites perpendiculaires au plan du tableau.

On voit aussi que deux points, pris sur la ligne d'horizon, à droite et à gauche du centre, et à des distances de ce point égales à la distance centrale, sont les points accidentels de toutes les horizontales inclinées de 45 degrés sur le plan du tableau : on les nomme *points de distance*.

4. En théorie, la position du point de vue à l'égard du tableau est arbitraire, et dépend uniquement de la volonté du peintre. Quelquefois un ouvrage de peinture est destiné à être placé verticalement, dans un lieu plus élevé que le spectateur, et l'axe de perspective ne doit plus rencontrer la surface même du tableau, mais son prolongement en dessous, condition sans laquelle il ne produirait pas l'illusion désirée. Ordinairement, dans la pratique, on suppose le point de vue en face de la toile, et la distance centrale égale tout au plus au double de la largeur de son cadre. Mais les principes de la science sont, à cet égard, d'une indépendance absolue (*).

5. Les grandeurs géométriques, c'est-à-dire celles qui peuvent être nettement définies, sont les types auxquels se rapportent les grandeurs irrégulières et de nature quelconque. Pour examiner plus méthodiquement leurs propriétés dans la perspective, sous leur aspect théorique ou

(*) Valenciennes prescrit essentiellement de limiter la distance du point de vue là où le spectateur cesse d'embrasser le tableau d'un seul regard. Il est cependant incontestable que les rayons visuels, n'éprouvant aucune déviation dans leur passage hypothétique à travers la toile, parviennent au spectateur comme s'ils provenaient des objets eux-mêmes, quels que soient la position du point de vue et le mouvement de l'œil autour de ce point.

Digitized by Google

seulement avec leurs applications les plus immédiates, nous considérerons successivement des lignes droites isolées, des figures rectilignes ou curvilignes, et des surfaces courbes ou polyédriques. Ces diverses propriétés, groupées d'après leurs analogies, ou procédant suivant leur filiation naturelle, donneront un premier aperçu de la science et en composeront une théorie élémentaire. Nous nous occuperons ensuite de leurs applications pratiques. Chacune de ces deux sections renfermera un chapitre sur les ombres et les lumières.

A la suite des généralités qui s'appliqueront à toutes les sortes de lignes ou de surfaces géométriques, nous nous attacherons particulièrement à celles qui, par la fréquence de leur usage, ont une importance véritable pour le praticien. Ainsi, bien que les nomenclatures des géomètres embrassent des lignes courbes d'une multitude d'espèces, il en est peu néanmoins, dans le nombre de celles qu'emploient l'industrie ou les beaux-arts, qui ne soient susceptibles de se ramener au cercle, dont nous ferons en conséquence une étude spéciale. Par la même raison, les cylindres, les cônes, la sphère, le tore, certaines surfaces gauches, sont les surfaces courbes dont nous devrons faire le principal objet de nos considérations spéculatives, et la base de nos exercices pratiques.

Le lecteur sera censé connaître l'Arithmétique, notamment les proportions, le calcul décimal et métrique, et les racines carrées; les principes les plus vulgaires de la Géométrie, tels que la théorie des plans, les propriétés des figures semblables, la génération des surfaces courbes et leurs classifications les plus générales; enfin, les signes algébriques habituellement usités dans les démonstrations de géométrie. La seconde section de l'ouvrage suppose connus aussi les procédés de la Géométrie descriptive; mais il y sera pourvu dans un Appendice.

Digitized by Google

Quant à ces premières notions d'optique que l'on peut considérer comme également indispensables pour les conceptions de la perspective linéaire, elles sont, de nos jours, universellement répandues. Mais quelques développements sur la théorie des ombres portées et des images réfléchies pouvant être utiles, on les trouvera dans les paragraphes relatifs à ces effets de la lumière.

Digitized by Google

# PREMIÈRE SECTION.

## ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE.

### § Ier.

### DES LIGNES DROITES EN PERSPECTIVE.

6. Tous les rayons de lumière qui partent des différents points d'une ligne droite, et se réunissent au point de vue, sont dans un même plan, que je nommerai *plan perspectif* de la droite proposée. Dès lors, sa perspective se trouve sur l'intersection de son plan perspectif avec le plan du tableau; elle y est d'ailleurs limitée par les rayons visuels provenant des extrémités de la droite. De cette remarque, et des principes les plus élémentaires de la théorie des plans en géométrie, découlent les propositions suivantes, qui sont la base de la perspective linéaire.

7. *Toute droite a pour perspective une ligne droite.*

On sait en effet que l'intersection de deux plans ne peut être une ligne courbe. La *fig.* 1, *Pl. II*, rend la proposition sensible. Le quadrilatère PQ représentant le tableau, O le point de vue, AB une droite quelconque dans l'espace, les deux rayons visuels AO, BO déterminent le plan perspectif, dont l'intersection *ab*, avec le plan PQ, est la perspective de la droite.

Cependant, si la droite passe en direction par le point de vue, sa perspective se réduit à un point, parce que le plan perspectif se réduit lui-même à une droite, c'est-à-dire à la proposée.

Digitized by Google

8. *La perspective de toute droite parallèle au tableau est elle-même parallèle à cette droite.*

Car, la droite et sa perspective étant dans un même plan se rencontreraient, si elles n'étaient pas parallèles : mais alors la première rencontrerait le plan du tableau, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc, en particulier, toute verticale a sa perspective verticale; toute horizontale parallèle au tableau a la sienne horizontale. Les arêtes verticales d'un mur ou d'un édifice quelconque seraient mal représentées, si elles penchaient sur la ligne d'horizon. Ces remarques sont d'une application continuelle dans la pratique.

9. *Toutes les droites et toutes les courbes planes, comprises dans un même angle visuel, ont une seule et même perspective.*

On entend par angle visuel d'une droite l'angle formé par les rayons dirigés de ses extrémités vers le point de vue. Cela posé, le principe énoncé résulte manifestement de ce que toutes les lignes planes dont il s'agit ont le même plan perspectif.

La ligne d'horizon contient donc la perspective de toute ligne située dans le plan d'horizon (3).

Ici se présente naturellement une réflexion. Puisqu'une même ligne du tableau convient également à une infinité de lignes dans l'espace, la perspective linéaire doit être impuissante à nous donner des idées exactes de la forme, de la grandeur et de la position des objets. Cela est incontestable; mais notre jugement et notre expérience suppléent souvent ce qu'elle laisse par elle-même d'indéterminé. A la première vue de la perspective linéaire d'un édifice, nous saisissons l'idée d'un tel objet plutôt que celle de tout autre qui serait situé sur la direction des mêmes rayons visuels, qui aurait en conséquence la même perspective, mais dont

Digitized by Google

la forme nous serait moins familière ou serait moins caractérisée. Sans efforts, et presque involontairement, notre pensée prolonge les rayons visuels jusqu'à une distance indéterminée, peut-être, mais du moins telle en chaque point que les lignes prennent les positions relatives qui leur conviennent dans l'édifice.

10. *Des droites parallèles dans l'espace concourent en perspective vers leur point accidentel.*

En effet, les plans perspectifs des droites considérées, en quelque nombre qu'elles soient, se coupent suivant une même droite, parallèle à leurs directions, et rencontrant le plan du tableau en un certain point. Ce point de rencontre, étant à la fois dans chaque plan perspectif, doit se trouver sur la direction de chaque perspective; donc il constitue, pour toutes les perspectives, un point de concours. D'ailleurs, c'est le point accidentel des proposées (3).

Observons aussi qu'il représente la perspective d'un point infiniment éloigné de chacune des droites, parce qu'il est situé sur le rayon visuel parallèle à leurs directions.

Cette proposition mérite une attention toute spéciale, en raison de ses nombreuses applications. Voici, par exemple, un de ses usages: Étant donnés la perspective d'une droite et son point accidentel, pour représenter sur le tableau une parallèle à cette droite passant par un point déterminé, il suffit de mener par la perspective de ce point une droite dirigée vers le point accidentel.

Entre autres conséquences, le centre de perspective sera le point de concours des perspectives de toutes les droites perpendiculaires au tableau.

Les points de distance seront dans le même cas à l'égard de toutes les horizontales inclinées de 45 degrés sur le tableau, le sens d'inclinaison déterminant l'un ou l'autre de ces points.

Digitized by Google

La surface d'un terrain horizontal étant décomposée en un réseau de carrés ayant leurs côtés parallèles et perpendiculaires au tableau, la perspective sera un réseau de trapèzes (*fig.* 52) ayant leurs bases horizontales et leurs côtés dirigés vers le centre de perspective. C'est ici l'origine de la méthode pratique du *treillis*.

Des droites parallèles et horizontales doivent concourir sur le tableau en un point de la ligne d'horizon puisque cette ligne contient leur point accidentel. C'est ainsi (*fig.* A, *Pl. I*) que les directions *mn*, *pq*, *p'q'*, *rs*, *tu* concourent en V. Les rangées d'arbres, les alignements de troupes, des rails de chemins de fer, et surtout les lignes architecturales fournissent au peintre de continuelles occasions d'appliquer cette propriété.

Toute rangée de droites parallèles, comprises entre deux horizontales, et par conséquent d'égale grandeur, sera comprise sur le tableau entre deux droites concourant en un point de la ligne d'horizon, comme on le voit *fig.* 2, où les lignes *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, *kl*, représentent les perspectives d'une suite de verticales dans ces conditions.

En considération de ces diverses propriétés, on a nommé point de *fuite* le point accidentel de plusieurs droites horizontales parallèles, et lignes *fuyantes* leurs perspectives. Effectivement, les droites fuient dans l'espace, à mesure que les perspectives approchent de ce point, qu'elles n'atteignent jamais, si les droites ne sont pas prolongées à l'infini.

Remarquons enfin que le cas particulier où les droites parallèles entre elles le sont aussi au tableau ne fait pas exception au principe général. Si les perspectives deviennent alors parallèles, comme nous l'avons établi, on peut dire que leur point de concours est à une distance infinie.

11. *La perspective de tout point situé dans le plan cen-*

Digitized by Google

*tral est à l'infini, et, par suite, celle de toute droite dont une extrémité est dans le plan central, a une longueur infinie, le tableau étant considéré comme une surface illimitée.*

Car d'abord il est évident qu'un point étant donné dans le plan central, le rayon visuel qui le joint au point de vue ne rencontre le plan du tableau qu'à une distance infinie.

Et, si une droite a l'une de ses extrémités dans le plan central, des points de cette droite de plus en plus voisins de cette extrémité ont des perspectives qui s'éloignent de plus en plus rapidement, puisque, pour ce dernier point, l'éloignement est infini ; la longueur de la perspective est donc infinie.

12. *Des droites dirigées vers un même point du plan central ont des perspectives parallèles, quelles que soient leurs directions dans l'espace.*

En effet, les plans perspectifs devant passer par le point de vue et par le point du plan central vers lequel elles concourent, se coupent tous suivant la droite qui joint ces deux points : cette dernière droite, située dans le plan central, est parallèle au tableau ; donc, les intersections des plans perspectifs avec le tableau sont parallèles à cette même droite, et, dès lors, parallèles entre elles.

D'après cette démonstration, il n'est pas nécessaire, pour le parallélisme, que les droites de l'espace se croisent en un même point du plan central : il suffit qu'elles passent chacune par quelque point d'une même droite menée dans le plan central par le point de vue. Les perspectives sont alors parallèles à cette dernière droite, et la réciproque est vraie. Donc, en particulier, des droites qui rencontrent en quelques points la ligne d'intersection du plan central avec le plan d'horizon ont leurs perspectives horizontales, quelles que soient leurs inclinaisons dans l'espace.

Digitized by Google

A l'occasion de ce principe, nous ferons une remarque purement théorique. Supposons deux droites concourant en un point du plan central : on peut considérer leurs perspectives comme deux droites parallèles dans l'espace, et les droites proposées comme les perspectives de ces parallèles, dans leur plan pris pour celui d'un tableau. Or, on voit que ces nouvelles perspectives concourent en un point de la ligne d'intersection de leur plan avec le plan central, comme sur un tableau vertical les perspectives de deux horizontales parallèles concourent en un point de la ligne d'horizon. La raison en est la même.

13. Considérons une droite AMB (*fig.* 3) rencontrant le plan central en M, le tableau en B′, et dont la partie AM soit en arrière du plan central, le point de vue étant en O.

Cette partie AM n'a pas de perspective (1). Cependant, rien n'empêche de concevoir par l'un quelconque de ses points, tel que A, la droite AO*a* comme un rayon visuel. Dans cette hypothèse, nous appellerons le point *a*, rencontre de ce rayon avec le tableau, une perspective *imaginaire* de A. Ce qui la distingue essentiellement d'une perspective *réelle*, c'est que l'œil du spectateur ne peut plus être dirigé à la fois vers l'objet et sa perspective.

Un second point A′ donnera la perspective imaginaire *a*′, A″ donnera *a*″, etc., enfin le point M un point à l'infini sur la direction *aa*′*a*″....

Des points B, B′, B″,...., pris sur MB, auront des perspectives réelles *b*, B′, *b*″, *b*‴,..., le second de ces points se confondant avec sa perspective; et le même point M, considéré comme faisant partie de MB, aura la sienne à l'infini sur la direction *bb*″*b*‴.... Enfin, le point situé à l'infini sur le prolongement de MB aura sa perspective en I, point accidentel de la droite.

Donc, si l'on prend sur les deux parties AM et MB des

Digitized by Google

points de plus en plus voisins de M, les perspectives réelles ou imaginaires s'éloignent de plus en plus en sens opposés, et tendent vers l'infini ; elles sont d'ailleurs en ligne droite, puisque le plan perspectif est le même.

Et, si la droite est prolongée à l'infini dans les deux sens opposés de sa direction, sa perspective est également infinie ; mais les points situés à l'infini sur la droite et sa perspective, ne se correspondent pas, sauf le cas où elle est parallèle au tableau. Le point accidentel est celui de la perspective qui correspond aux deux points situés à l'infini sur la proposée; il sépare les parties réelle et imaginaire. De même, les deux points de la perspective situés à l'infini correspondent au point où la droite rencontre le plan central, ce qui s'accorde d'ailleurs avec le n° 11.

14. *Des droites, dirigées vers un même point de l'espace, ont des perspectives, réelles ou imaginaires, dirigées aussi vers un même point.*

Si d'abord le point de concours des droites est en avant du plan central, la proposition est évidente. Les perspectives sont alors réelles.

Si le point de concours est en arrière du plan central, sa perspective est imaginaire. Mais les plans perspectifs se coupent toujours suivant la droite qui le joint au point de vue ; d'où il suit que toutes les perspectives doivent concourir vers le point où la direction de cette droite rencontre le plan du tableau ; mais elles ne l'atteignent que dans leurs parties imaginaires.

Ce qui doit être remarqué particulièrement dans le second cas, c'est que les perspectives convergent dans le sens où elles divergeraient si le point de concours de l'espace était en avant du plan central. Donc :

Si les droites concourent en avant du plan central, leurs perspectives concourent dans le même sens qu'elles ;

Digitized by Google

Et, si elles concourent en arrière, leurs perspectives concourent dans le sens inverse.

L'hypothèse où les droites concourent en un point du plan central donne le cas intermédiaire pour les perspectives, celui de leur parallélisme.

15. *Deux droites étant à angle droit dans un plan perpendiculaire au tableau, le centre de perspective est toujours en ligne droite avec les points accidentels et compris entre eux ; et la distance centrale est moyenne proportionnelle entre les distances du premier point aux deux autres.*

En effet, deux parallèles aux droites, menées par le point de vue, sont dans un plan qui contient l'axe de perspective et les points accidentels des droites. Ces deux parallèles et la ligne de jonction des points accidentels déterminent un triangle rectangle dont cette dernière ligne est l'hypoténuse, et dont la hauteur, dirigée suivant l'axe de perspective, est la distance centrale. La proposition énoncée s'ensuit, conformément à une propriété du triangle rectangle fort connue.

Deux horizontales à angle droit se trouvent dans ce cas. Leurs points accidentels sont sur la ligne d'horizon, et l'un d'eux étant donné, la position de l'autre pourrait se calculer au moyen de cette relation. Il est vrai que dans les conditions ordinaires de la pratique, l'étendue d'un tableau ne peut embrasser à la fois les deux points.

Si l'une des horizontales est parallèle au tableau, l'hypoténuse du triangle rectangle devient infinie. En perspective, la première étant horizontale et la seconde allant au centre, l'angle qu'elles forment est aigu quand il a son ouverture dirigée vers la ligne normale.

Un angle droit dans l'espace devient aigu ou obtus en perspective, suivant la position de son sommet à l'égard

Digitized by Google

des points accidentels de ses côtés. Quand la perspective du sommet est extérieure au cercle décrit sur la ligne de jonction des points accidentels comme diamètre, l'angle devient aigu vers cette ligne ; dans le cas contraire, il est obtus.

16. *Des droites situées d'une manière quelconque dans un plan parallèle au tableau ont en perspective les mêmes rapports de grandeur et de position que dans l'espace.*

Ce principe découle immédiatement de la théorie des lignes proportionnelles, en vertu de laquelle chaque droite doit être à sa perspective comme la distance du point de vue au plan des droites est à la distance centrale ; car il s'ensuit que les perspectives sont proportionnelles aux droites considérées. En outre, les angles formés par les lignes du tableau et celles de l'espace sont respectivement égaux, puisque leurs côtés sont parallèles (8). Ces lignes forment en conséquence deux systèmes parfaitement semblables.

Donc, quand une droite parallèle au tableau est divisée en parties égales, sa perspective l'est pareillement ; et si les parties, au lieu d'être égales, ont entre elles des rapports quelconques, leurs perspectives sont dans les mêmes rapports.

Le principe est d'ailleurs applicable à toutes courbes planes parallèles au plan du tableau.

On en tire plusieurs conséquences remarquables, telles que celles-ci : Un homme placé au sommet d'une tour a sa perspective de même grandeur que s'il était au pied de l'édifice. L'image d'un mât vertical dans des eaux tranquilles a la sienne de même grandeur que celle du mât. Dans un bataillon rangé suivant une ligne horizontale ou d'un niveau variable, mais parallèle au tableau, les extrémités et le centre ont même hauteur perspective, etc.

Digitized by Google

Si l'on objecte qu'une ligne plus éloignée du point de vue doit être comprise dans un angle visuel plus petit, la réponse est bien simple : cette condition est satisfaite pour le spectateur qui se place au point de vue, puisque les extrémités de la toile sont plus éloignées de son œil que le centre de cette surface, si du moins c'est aussi le centre de la perspective.

Soient données dans un tableau les verticales *ab*, *cd*, *ef*,... (*fig.* 4) comme perspectives d'autant de droites verticales, égales entre elles et s'appuyant sur un même plan horizontal : transportées parallèlement à elles-mêmes suivant des horizontales du tableau, elles doivent être susceptibles de venir se placer exactement dans l'angle de deux droites, telles que *ai* et *bi*, concourant sur la ligne d'horizon, et de prendre ainsi les positions *ab*, *c'd'*, *e'f'*,... ; car, cela revient à supposer que les droites de l'espace, par des mouvements parallèles au tableau, se transportent de manière à s'aligner entre deux horizontales, ce qui, en vertu de notre principe, ne change pas leurs grandeurs perspectives. Mais nous savons qu'alors (10) les perspectives satisfont à la condition spécifiée.

Cette vérification est encore possible lorsque les droites de l'espace sont situées à des hauteurs diverses. On supposera que, par des mouvements verticaux, elles viennent s'appuyer sur un même plan horizontal, comme la surface d'une pièce d'eau, et l'on fera en conséquence monter ou descendre leurs perspectives, au moyen des indications que pourra fournir le tableau.

C'est ainsi que la *fig.* A', *Pl. I*, nous offre en perspective plusieurs personnages présumés d'égale grandeur ; les uns sont sur un quai, les autres au bord de l'eau. Soit *x'x* la ligne d'horizon perspectif (c'est à peu près la ligne d'horizon visuel), et réduisons nos personnages à des droites verticales *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, *kl*,... ; les quatre premiers étant

Digitized by Google

de niveau, parce que la surface du quai est supposée horizontale, nous tirons *ai* et *bi* vers un point quelconque *i* de *x'x*, et nous faisons en quelque sorte glisser horizontalement *cd*, *ef*, *gh* jusqu'à ce que leurs pieds soient sur *ai* : or, nous trouvons qu'ils se trouvent alors exactement interceptés par les côtés de l'angle *aib*. Quant à ceux qui sont à fleur d'eau, nous les transposons horizontalement jusqu'à la ligne de niveau *rs*, puis verticalement jusqu'au-dessus de *tu*, et horizontalement encore jusqu'à ce qu'ils reposent sur *ai*. Dans cet état, il arrive que leurs têtes atteignent aussi l'alignement *ib*. Nous concluons qu'ils sont tous d'accord avec notre principe.

Mais, si l'un d'eux après sa transposition n'avait pas atteint l'alignement *ib*, ou l'eût dépassé, sa grandeur perspective se serait trouvée incompatible avec celles des autres, et il y aurait eu une véritable contradiction dans le tableau. Des fautes de cette nature se remarquent dans les *fig.* B et C, *Pl. I.* La première représente deux groupes de personnages, les uns au bord de la mer, les autres dans une barque à quelque distance du rivage; ils sont tous supposés à peu près de niveau et de même grandeur dans l'espace : cependant, si l'on en prend un de chaque groupe, par exemple *ab* et *cd*, on voit que la vérification n'a plus lieu ; les alignements *ac*, *bd* se rencontrent en un point *o* situé fort au-dessous de la ligne d'horizon. Ainsi, le personnage de la barque est figuré trop petit, ou celui du rivage trop grand.

Dans la *fig.* C, on aperçoit un pêcheur *ab* sur la rive d'un cours d'eau, et plus loin un édifice. Supposons d'abord le sol de l'édifice de niveau avec la rive, et prenons dans sa façade une hauteur *cd*, présumée égale à la stature du pêcheur ; il faudra, dans cette hypothèse, que les deux alignements *ac*, *bd* concourent en un point de la ligne d'horizon : or, c'est ce qui n'est pas, et la rencontre



Digitized by Google

a lieu bien en deçà de cette ligne. Les deux objets ne peuvent donc être supposés sur un même plan horizontal, et pour justifier la perspective, il faudrait concevoir l'édifice au-dessous du niveau de l'eau; mais c'est évidemment ce que l'on ne saurait admettre. La perspective est donc inexacte.

Quelque graves que soient de telles fautes contre les principes, les plus vulgaires et les plus simples de la perspective linéaire, elles sont très-communes dans les ouvrages de peinture (*). Sous ce rapport, les admirables toiles de Joseph Vernet et de Claude Lorrain lui-même pourraient donner prise à la critique; mais ces grands paysagistes possédaient la science beaucoup plus difficile de la perspective aérienne; ils l'ont portée jusqu'à sa dernière limite.

17. Ce qui a été dit pour établir le principe de l'article précédent peut se traduire ainsi :

*Une droite étant parallèle au plan du tableau, sa distance au plan central est à la distance centrale, comme la grandeur de la droite est à celle de sa perspective.*

Nous emploierons ce théorème pour calculer l'un quelconque des termes de la proportion, les trois autres étant connus. Si, par exemple, la distance centrale étant de 3 mètres, on demande la grandeur perspective d'une droite de 24 mètres, parallèle au tableau et située à 80 mètres du plan central, nous poserons

$$80 : 3 :: 24 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 0{,}9;$$

(*) Je soupçonne que ces fautes ne sont pas toujours involontaires, et je me les explique ainsi : les paysagistes affectionnent les lointains, les vastes panoramas, et il est facile de satisfaire leur goût à cet égard, par une élévation convenable du tableau et du point de vue. Mais alors les objets rapprochés sortent du champ de la perspective, s'ils ne sont assez élevés dans l'espace, et les premiers plans du tableau se rapportent à d'autres objets plus éloignés. Or, il semble que ceux-ci, réduits à leurs vraies dimensions perspectives, auraient moins d'intérêt pour le spectateur, et on les amplifie outre mesure.

Digitized by Google

et nous conclurons que la grandeur demandée est de 9 décimètres.

Le principe fournit ces trois corollaires, d'ailleurs évidents en eux-mêmes :

Toute droite parallèle au tableau, située au delà de ce plan, est plus grande que sa perspective;

Située en deçà, elle est moindre que sa perspective;

Située dans le tableau, elle se confond avec sa perspective.

Pour en tirer d'autres conséquences, nous représenterons les quantités par des lettres. Soient G et $g$ la grandeur de la droite et celle de sa perspective, D et $d$ la distance de la droite au plan central et la distance centrale. La proportion devient

$$D : d :: G : g.$$

Cela posé, nous admettrons que le tableau, la droite et le point de vue soient susceptibles de se déplacer successivement, le parallélisme étant conservé, et nous discuterons les résultats de ces hypothèses.

18. D'abord, supposons que le tableau s'éloigne : alors $d$ augmente; mais, en vertu de la proportion, il faut que $g$ augmente dans le même rapport, D et G ne changeant pas. Donc :

*Quand le tableau s'éloigne ou se rapproche, la grandeur perspective de la droite varie proportionnellement à la distance centrale.*

Pour donner plus d'extension à cette remarque, nous pouvons considérer un système de droites formant un assemblage quelconque dans l'espace. Pendant le mouvement du tableau, leurs perspectives formeront une figure constamment semblable à elle-même, parce que les plans perspectifs restent invariables. Mais les surfaces semblables sont comme les carrés des lignes homologues; donc, les perspec-



Digitized by Google

tives de ces droites varieront proportionnellement à la distance centrale, et les surfaces qu'elles comprennent sur la toile, proportionnellement au carré de cette distance.

J'appellerai *champ perspectif* d'un tableau l'étendue, pour une distance donnée, des surfaces parallèles à son plan, que l'œil peut embrasser de son point de vue. Or, cette étendue doit varier *en raison inverse* de la grandeur perspective des surfaces. Donc :

*Quand le tableau s'éloigne ou s'approche, le champ perspectif varie en raison inverse du carré de la distance centrale.*

Ainsi, par exemple, la distance centrale devenant trois fois plus grande, la perspective de chaque surface devient neuf fois plus grande et le champ perspectif neuf fois plus petit.

Deux tableaux ont le même champ perspectif, lorsque les dimensions de leurs cadres sont proportionnelles à leurs distances centrales.

Quant à l'étendue d'un terrain, d'une configuration quelconque, qu'un tableau peut représenter, ce qui constitue son champ dans l'acception la plus vulgaire, on conçoit qu'elle n'est pas susceptible d'être déterminée, mais il semble rationnel de lui donner pour mesure le champ perspectif tel qu'il a été défini. Une expérience journalière vient à l'appui de cette réflexion. Placés dans l'intérieur d'une chambre, en face d'une fenêtre, nous découvrons au dehors un espace d'autant plus grand que cette ouverture est plus rapprochée de nos yeux ; mais aussi les perspectives des objets, si elles étaient tracées dans son plan, seraient d'autant plus petites.

19. En second lieu, supposons que la droite G s'éloigne du plan central, D augmente, et la proportion exige que $g$ diminue dans un rapport égal. Donc :

Digitized by Google

*Une droite étant donnée dans un plan parallèle au tableau, mais susceptible de s'approcher ou de s'éloigner, sa perspective varie en raison inverse de sa distance au plan central.*

Donc, en particulier, une verticale est d'autant moindre sur le tableau, qu'elle appartient à un plan plus éloigné du plan central.

Une horizontale, d'ailleurs de direction quelconque, doit, sur le tableau, s'approcher de la ligne d'horizon, à mesure que les points de la perspective correspondent à des points plus éloignés dans l'espace; car sa distance au plan d'horizon est une verticale dont la perspective diminue suivant la loi énoncée. Cette remarque s'accorde avec celles que nous avons faites au n° 10.

La grandeur perspective d'objets quelconques, estimée suivant les dimensions de ces objets parallèles au tableau, dépend ainsi de la position plus ou moins rapprochée des plans qui les contiennent. On fait allusion à cette propriété lorsqu'on distingue, au sujet d'un ouvrage de peinture, les objets du *premier* ou du *second plan*, ceux des *plans éloignés*. On désigne par ces mots des plans parallèles au tableau et distribués à certains intervalles, sans avoir toutefois des positions mathématiquement déterminées.

Nous ferons encore une remarque. Il est évident, par le principe du n° 16, et par les *fig.* 2 et 4, que, si des verticales sont égales et de niveau dans l'espace, les perspectives de ces droites sont proportionnelles à leurs propres distances à la ligne d'horizon : donc, en vertu de ce qui précède, ces dernières distances sont inversement proportionnelles aux distances des droites au plan central. Cela se vérifie d'ailleurs par cette simple considération, que *bp*, *dq*,..., distances des perspectives à la ligne d'horizon, sont elles-mêmes les perspectives d'autant de droites égales et dans les mêmes conditions que les proposées, savoir, des

Digitized by Google

droites formées par les prolongements de celles-ci jusqu'à la rencontre du plan d'horizon.

20. Comme troisième hypothèse, supposons que le point de vue et le plan central s'approchent ou s'éloignent du tableau. Ici D et *d* varient simultanément, et la perspective subit l'influence de ces deux variations qui tendent, l'une à l'augmenter et l'autre à la diminuer. Mais, si la droite G est très-éloignée, la distance D est sensiblement constante, et le résultat le même que si le tableau s'était approché ou éloigné du plan central, le point de vue étant immobile.

21. Dans ces trois hypothèses, la perspective variait en raison des variations attribuées à une autre quantité. Mais on peut vouloir qu'elle reste invariable, par exemple quand on fait avancer ou reculer le point de vue; alors ce sera nécessairement la droite elle-même qui variera soit de grandeur, soit de position. Si l'on considère des objets quelconques, les rayons visuels conçus par les divers points de la perspective supposée invariable changeront de direction, et les objets devront prendre dans l'espace des positions différentes, ou leurs dimensions se modifier. Il en serait ainsi d'ailleurs, dans le cas où le point de vue se déplacerait parallèlement au tableau, le plan central étant immobile.

L'effet que doit produire un tableau n'a donc lieu rigoureusement que pour le spectateur placé au point de vue. Dès qu'on s'écarte de ce point, la perspective peut encore n'avoir rien de choquant, mais elle correspond à de nouveaux objets, situés sur la direction de rayons visuels concourant au nouveau point occupé par l'œil du spectateur.

22. La proposition du n° 17 fait voir comment la grandeur perspective d'une droite parallèle au tableau dépend de sa grandeur et de sa position dans l'espace. La suivante exprime une relation analogue pour une droite de direction

Digitized by Google

quelconque. Elle ne nous servira pas à mettre une droite en perspective, mais nous en tirerons, pour la théorie, diverses conséquences.

*Étant donnée une droite quelconque dans l'espace, sa grandeur est à celle de sa perspective, comme le produit des distances de ses deux extrémités à la trace* (*) *de sa direction dans le plan central est au produit des distances de ce dernier point au point de vue et à la trace de la même direction dans le plan du tableau.*

Pour le démontrer, soient (*fig.* 5)

AB la droite donnée,
*ab* sa perspective,
PQ le plan du tableau,
MN le plan central,
O le point de vue,
R et V les traces de la droite dans ces deux plans,

et soit menée RO. Les quatre quantités AR, BR, OR, RV, dépendent de la position de la droite AB; lorsque ces quantités seront données, il s'agit de prouver qu'on aura

$$AB : ab :: AR \times BR : OR \times RV.$$

A cet effet, remarquons d'abord que le point V se trouve sur la direction *ab*, parce qu'il fait partie de l'intersection du plan perspectif avec le plan du tableau. Cette direction *ab*V est d'ailleurs parallèle à RO, car ce sont les intersections de deux plans parallèles par le plan perspectif.

---

(*) J'appelle, comme on le fait communément, *trace* d'une droite dans un plan, le point où sa direction rencontre le plan.

L'énoncé de ce théorème paraîtra un peu long, mais la démonstration en est très-simple. Les corollaires que j'en tire se déduiraient encore, mais d'une manière un peu moins directe, de la considération des coordonnées employées plus loin dans les applications pratiques.

Digitized by Google

Maintenant, tirons BG parallèle à $ab$; nous aurons par les propriétés des droites parallèles :

$$GB : ab :: BO : bO,$$
$$BO : bO :: BR : RV;$$

d'où, en vertu du rapport commun,

$$GB : ab :: BR : RV.$$

D'une autre part, nous avons

$$AB : GB :: AR : OR.$$

Multipliant terme à terme ces deux dernières proportions et supprimant le facteur commun aux deux termes d'un même rapport, nous obtenons

$$AB : ab :: AR \times BR : OR \times RV,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si toutes les lignes supposées connues étaient données métriquement, il suffirait de substituer leurs valeurs dans cette proportion pour en conclure la valeur métrique de $ab$. Mais ces lignes ne sont pas données dans la plupart des questions usuelles, et nous ne devons voir ici qu'un théorème utile par ses corollaires ou son emploi dans d'autres démonstrations.

23. La proportion donne

$$ab = AB \times \frac{OR \times RV}{AR \times BR},$$

et ce résultat nous conduit à faire plusieurs hypothèses.

Supposons que la droite AB, mobile *sur sa propre direction*, s'approche ou s'éloigne du plan central. Les quantités OR, RV resteront constantes, mais AR et BR varieront, et nous voyons que la valeur de $ab$ variera en raison inverse du produit AR $\times$ BR. Ainsi, *une droite étant mobile*

Digitized by Google

*sur sa propre direction, sa perspective varie en raison inverse du produit des distances de ses extrémités à la trace de sa direction dans le plan central.*

Si, la droite s'approchant, son extrémité B vient se placer dans le plan central, BR se réduit à zéro, le dénominateur est nul, et la valeur de *ab* devient infinie, ce qui s'accorde avec le n° 11.

24. Concevons que la droite AB (*fig.* 6), d'abord dans une position quelconque, vienne prendre la position immédiatement voisine BC, et que *bc* soit sa nouvelle perspective. *ab* et *bc* seront donc en raison inverse des produits AR × BR et BR × CR, ou, par la suppression du facteur commun, en raison inverse des quantités AR et CR, c'est-à-dire que nous aurons

$$bc : ab :: AR : CR.$$

D'ailleurs AR et BR sont directement proportionnelles aux perpendiculaires que l'on conçoit abaissées des points A et C sur le plan central. Donc :

*La perspective du milieu d'une droite divise celle de cette droite en parties inversement proportionnelles aux distances des extrémités correspondantes de la droite au plan central.*

On voit que les parties seront égales si la droite est parallèle au plan central, ce que nous savions déjà (16). La division sera d'autant plus inégale que la droite sera moins inclinée sur le plan central et plus rapprochée de ce plan.

25. Soit I (*fig.* 6) le milieu de AB : si la droite est à une distance considérable, le produit AR × BR sera sensiblement égal au carré de IR. Donc, dans ce cas, *la perspective de la droite varie sensiblement en raison inverse du carré de la distance de son milieu au plan central.*

A la rigueur, le carré de AI est toujours un peu plus grand

Digitized by Google

que le produit AR × BR ; car on sait que la moyenne arithmétique de deux quantités inégales surpasse leur moyenne géométrique. Mais la loi précédente tend d'autant plus vers l'exactitude, que la droite est plus éloignée ou plus petite. En l'admettant comme vraie, nous concluons que la perspective est quatre fois moindre pour une distance double, neuf fois pour une distance triple, etc. Mais, si la droite était peu éloignée, la décroissance serait encore plus rapide, parce que le produit ci-dessus serait notablement inférieur au carré.

Cette remarque est indépendante de la direction de la droite, qu'on peut supposer indifféremment oblique ou perpendiculaire au plan du tableau : si elle est oblique, les distances au plan central peuvent être évaluées sur la direction oblique ou suivant des perpendiculaires à ce dernier plan. Nous en tirons particulièrement cette conséquence :

*Étant donné un terrain horizontal suffisamment éloigné, si on le décompose en zones d'égale largeur et parallèles au plan central, cette largeur diminuera sur le tableau proportionnellement au carré de la distance de chaque zone au plan central.*

Car la largeur de chaque zone peut être comparée à une droite perpendiculaire au plan central et mobile sur sa propre direction.

Lorsqu'un objet de forme quelconque s'éloigne du plan central, ses dimensions parallèles et ses dimensions perpendiculaires à ce plan diminuent donc en perspective suivant des lois fort différentes, puisque pour les premières la diminution est simplement proportionnelle à la distance (17). Des objets semblables entre eux étant rangés suivant une ligne perpendiculaire au plan central, les faces parallèles à ce plan conservent leurs proportions linéaires, et ne cessent pas de former des figures semblables ; mais il en est autrement des faces obliques : à mesure qu'elles correspon-

Digitized by Google

dent à des objets plus éloignés, elles ont proportionnellement moins de largeur perspective.

Qu'une rangée d'arbres, uniformément espacés, s'étende sur une ligne perpendiculaire au plan central : l'intervalle qui les sépare consécutivement diminuera sur le tableau beaucoup plus rapidement que leur hauteur ; les axes de leurs troncs sembleront déjà sur le point de se confondre, lorsque celle-ci sera encore considérable.

Même remarque pour des édifices alignés perpendiculairement au plan central, et dont on aperçoit la fuite. Si l'on en compare deux d'égales dimensions, et dont l'un soit dix fois plus éloigné que l'autre, les hauteurs ou les largeurs des pignons seront en perspective dans le rapport de 1 : 10 ; mais la largeur de la façade du premier égalera tout au plus un centième de celle du second.

Dans les livres à l'usage de l'enfance, il se trouve une gravure ayant la prétention de représenter Gulliver étendu sur le dos, tandis qu'autour de son corps immense des régiments de cavaliers exécutent leurs évolutions : mais le géant tout entier a les mêmes proportions que s'il était debout, bien que sa tête soit opposée au spectateur. Nous pouvons donc voir ici une double faute de perspective, car les parties les plus éloignées devraient être figurées plus petites, et celles qui sont inclinées sur l'horizon ne peuvent conserver les proportions de la nature. Aussi l'image ne produit-elle pas l'illusion qui était dans les intentions de son auteur.

26. Nous déduirons de notre théorème un dernier corollaire.

Considérons une droite AB perpendiculaire au plan central, et supposons qu'elle se meuve, non plus sur sa propre direction, mais en restant constamment parallèle à elle-même, et de manière que chacun de ses points soit tou-

Digitized by Google

jours à la même distance de ce plan. Dans cette hypothèse, AR et BR ne changeront pas de grandeur ; OR seul variera. Mais *ab*, d'après son expression générale (23), varie en raison directe de OR, qui représente ici la distance de la droite à l'axe de perspective. Donc :

*Étant donnée une droite perpendiculaire au plan central et dont la distance à ce plan reste constante, sa grandeur perspective varie proportionnellement à sa distance à l'axe de perspective.*

Ainsi, une façade d'édifice étant perpendiculaire au tableau, la perspective de chacune de ses lignes longitudinales, de la crête de sa toiture par exemple, deviendrait double si l'on doublait sa distance à l'axe de perspective. On conçoit bien en effet que, plus une telle ligne est vue *de côté*, et plus elle doit avoir de grandeur apparente. Elle se réduirait au contraire à un point, si elle venait coïncider avec l'axe de perspective.

Une droite perpendiculaire au plan central, et douée d'un mouvement de révolution autour de cet axe, ne changerait pas de grandeur perspective; et c'est évidemment ce qui doit être : car l'axe de perspective est aussi un axe de symétrie, en ce sens que toutes les lignes égales entre elles et de positions semblables à l'égard de cette droite et du point de vue, ont des perspectives égales.

Enfin, observons que, si la droite mobile s'éloigne indéfiniment de l'axe, sa perspective pourra atteindre et dépasser toute grandeur donnée, la surface du tableau étant elle-même prolongée indéfiniment.

---

Digitized by Google

## *Évaluation perspective de la dépression de l'horizon visuel.*

27. Nous nous proposons en ce moment une question spéciale qui se rattache à la théorie de la perspective des lignes droites, et peut servir à la compléter. Il s'agit d'évaluer l'abaissement que doit avoir, dans un tableau, la ligne d'horizon visuel au-dessous de la ligne d'horizon perspectif, en raison de la hauteur verticale attribuée au point de vue, ce qui va être expliqué.

On sait que l'horizon visuel d'un spectateur placé en rase campagne, ou mieux en pleine mer, est un cercle dont l'amplitude croît, par suite de la courbure de la Terre, avec l'élévation du point de vue. Le plan horizontal conçu par ce point, c'est-à-dire le plan d'horizon perspectif, coupe la voûte atmosphérique suivant un second cercle parallèle au précédent. La perspective de ce second cercle est une droite, et n'est autre que la ligne d'horizon perspectif. Celle du premier est une courbe (37), qu'il est permis de considérer comme une ligne droite, dans les conditions les plus usuelles. La courbure de la Terre est assez faible et l'élévation du point de vue toujours assez peu considérable pour qu'il soit permis aussi, dans la pratique, de confondre les deux lignes sur le tableau; mais si l'on aspire à un certain degré d'exactitude, on doit tenir compte de leur différence. Nous allons chercher à la déterminer, d'après des considérations empruntées aux questions si intéressantes de la physique du globe terrestre. Soient (*fig.* 7)

A le point de vue,

O le centre de la Terre,

AB l'élévation du point de vue au-dessus du niveau de la mer,

Digitized by Google

AD et BC deux tangentes dans un même plan vertical,
AM et DIH des parallèles à BC,
ODCM un rayon terrestre;

et supposons d'abord la transmission de la lumière rectiligne. Le point D est situé sur l'horizon visuel, et DH est un diamètre de cet horizon; AM est dans le plan d'horizon perspectif, et la distance du point D à la droite AM est ce qu'il s'agit de trouver, connaissant AB.

Or, DB étant un très-petit arc de la circonférence terrestre, MD est sensiblement parallèle à AB, et mesure la distance cherchée. Mais MD, composé de MC plus CD, est double de AB, c'est-à-dire que *la distance des deux horizons dans l'espace est double de la hauteur du point de vue.*

Pour évaluer cette distance sur le tableau, il faut déterminer l'éloignement de MD, c'est-à-dire calculer AM ou AD, ces deux lignes étant considérées comme égales. A cet effet, le triangle rectangle ODA nous montre que AD est moyenne proportionnelle entre AI et AO, c'est-à-dire entre 2AB et AO, qu'on peut réduire au rayon de la Terre. Désignant par R ce rayon, nous aurons donc:

$$AM = AD = \sqrt{2AB \times R}.$$

Sachant que le rayon de la Terre, pour la latitude moyenne de la France, est d'environ 6366200 mètres, il ne nous resterait plus qu'à substituer cette valeur, ainsi que celle de AB, et à exécuter le calcul indiqué.

La distance AM une fois connue, sa grandeur perspective, ou la distance des deux lignes d'horizon sur le tableau, s'obtiendrait d'après la règle du n° 17.

Mais, en supposant la transmission de la lumière rectiligne, nous avons négligé un phénomène dont l'influence sur la position apparente des objets terrestres est très-nota-

Digitized by Google

ble : c'est la réfraction atmosphérique. Pour avoir égard à cette influence, examinons la marche d'un rayon de lumière dans l'atmosphère.

Conservons dans la *fig.* 8 les lignes de la *fig.* 7. Un rayon visuel partant du point D, suivant une direction tangentielle à la Terre et dans un même plan vertical avec AB, s'inclinera sans cesse et formera une courbe, de manière qu'il rencontrera AB en un point A′ situé au-dessous du point A. Un observateur placé en A′ apercevra le point D en D′, sur la direction de la tangente à cette courbe, parce que le rayon visuel, en pénétrant dans son œil, aura la direction de cette tangente. Son horizon visuel aura la même étendue que s'il était en A et qu'il n'y eût pas de réfraction ; car, puisque le rayon est tangent à la Terre en D, aucun rayon provenant d'un point de la surface terrestre plus éloigné ne pourra parvenir en A′. D'où nous pouvons conclure que *la réfraction abaisse le point de vue pour un même horizon visuel,* ou, si l'on veut, qu'*elle diminue la courbure de la Terre.*

De même que l'apparence du point D se trouvera élevée en D′ pour l'observateur placé en A′, un observateur placé en D verrait le point A′ en A. On ne connaît pas la nature de la courbe formée par le rayon visuel de D en A′ ; elle dépend de la loi suivant laquelle varie la densité de l'atmosphère : mais on peut, sans erreur sensible, supposer cette variation uniforme dans les limites du problème, et la courbe sera un arc de cercle, ayant d'ailleurs très-peu de courbure. D′D sera en conséquence égal à A′A.

Or, d'après un grand nombre d'observations recueillies et discutées par MM. Biot et Puissant, il est permis d'admettre que le rapport de D′D à MD est constamment à peu près égal à 0,08. Donc A′A formera les 0,08 de MD, ou les 0,16 de AB ; par suite A′B vaudra les 0,84 de AB, et réciproquement AB vaudra les $\frac{100}{84}$ de A′B ; et si l'on con-

Digitized by Google

çoit la droite A'M' parallèle à AM, la valeur de M'D' sera double de A'B.

M'D' est la distance du point D' au plan d'horizon perspectif : pour celui-ci, en effet, il n'y a pas de réfraction, parce qu'il n'est simplement qu'une conception géométrique. Donc :

Étant donnée A'B comme hauteur d'un point de vue, en la doublant nous obtiendrons la distance métrique du plan d'horizon perspectif à celui de l'horizon visuel élevé par la réfraction; en multipliant la même hauteur par $\frac{100}{84}$, nous aurons la hauteur du point de vue qui correspond au même horizon visuel dans l'hypothèse de non réfraction, et nous pourrons calculer par la formule relative à cette hypothèse le rayon de cet horizon. Nous posséderons en définitive tous les éléments nécessaires à l'évaluation de la distance qui doit séparer sur le tableau les deux lignes d'horizon.

J'ai calculé, pour cet objet, la Table suivante (*) : les rayons d'horizons visuels y sont déterminés à moins d'un mètre près; mais les questions de perspective et autres où l'on peut l'employer n'exigent pas cette approximation, non plus que l'étendue donnée à la colonne des élévations verticales, dont les derniers termes surpassent celles des plus hautes montagnes.

---

(*) On emploie dans la topographie des Tables analogues à celle-ci, et donnant la différence entre le niveau apparent et le niveau vrai, leur argument étant la distance des deux points de station, représentée ici par le rayon d'horizon visuel : elles ont d'ailleurs peu d'étendue. D'autres Tables usitées dans les opérations nautiques font connaître, pour des hauteurs données, la dépression angulaire de l'horizon visuel, en degrés, minutes et secondes.

Digitized by Google

TABLE des rayons d'horizons visuels correspondants à des hauteurs données du point de vue au-dessus du niveau de la mer, correction faite de la réfraction.

| Hauteurs du point de vue. | Rayons d'horizons visuels. | Hauteurs du point de vue. | Rayons d'horizons visuels. | Hauteurs du point de vue. | Rayons d'horizons visuels. | Hauteurs du point de vue. | Rayons d'horizons visuels. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mètres. | mètres. | mètres. | mètres. | mètres. | mètres. | mètres. | mètres. |
| 1 | 3893 | 39 | 24314 | 270 | 63973 | 1250 | 137648 |
| 2 | 5506 | 40 | 24623 | 280 | 65147 | 1300 | 140374 |
| 3 | 6743 | 41 | 24929 | 290 | 66300 | 1350 | 143048 |
| 4 | 7786 | 42 | 25231 | 300 | 67433 | 1400 | 145673 |
| 5 | 8706 | 43 | 25530 | 310 | 68548 | 1450 | 148252 |
| 6 | 9537 | 44 | 25825 | 320 | 69645 | 1500 | 150785 |
| 7 | 10301 | 45 | 26117 | 330 | 70725 | 1550 | 153278 |
| 8 | 11012 | 46 | 26406 | 340 | 71789 | 1600 | 155731 |
| 9 | 11680 | 47 | 26691 | 350 | 72837 | 1650 | 158146 |
| 10 | 12312 | 48 | 26973 | 360 | 73870 | 1700 | 160524 |
| 11 | 12913 | 49 | 27253 | 370 | 74889 | 1750 | 162866 |
| 12 | 13487 | 50 | 27530 | 380 | 75894 | 1800 | 165178 |
| 13 | 14037 | 55 | 28873 | 390 | 76886 | 1850 | 167456 |
| 14 | 14567 | 60 | 30157 | 400 | 77866 | 1900 | 169704 |
| 15 | 15079 | 65 | 31389 | 410 | 78833 | 1950 | 171923 |
| 16 | 15573 | 70 | 32573 | 420 | 79788 | 2000 | 174112 |
| 17 | 16052 | 75 | 33717 | 430 | 80733 | 2250 | 184674 |
| 18 | 16518 | 80 | 34822 | 440 | 81670 | 2500 | 194664 |
| 19 | 16970 | 85 | 35894 | 450 | 82589 | 2750 | 204165 |
| 20 | 17411 | 90 | 36935 | 460 | 83502 | 3000 | 213243 |
| 21 | 17841 | 95 | 37947 | 470 | 84405 | 3250 | 221951 |
| 22 | 18261 | 100 | 38933 | 480 | 85297 | 3500 | 230330 |
| 23 | 18672 | 110 | 40833 | 490 | 86181 | 3750 | 238414 |
| 24 | 19073 | 120 | 42649 | 500 | 87056 | 4000 | 246232 |
| 25 | 19466 | 130 | 44390 | 550 | 91306 | 4250 | 253811 |
| 26 | 19852 | 140 | 46066 | 600 | 95365 | 4500 | 261169 |
| 27 | 20230 | 150 | 47683 | 650 | 99259 | 4750 | 268326 |
| 28 | 20601 | 160 | 49246 | 700 | 103006 | 5000 | 275296 |
| 29 | 20966 | 170 | 50763 | 750 | 106622 | 5500 | 288734 |
| 30 | 21324 | 180 | 52234 | 800 | 110118 | 6000 | 301572 |
| 31 | 21677 | 190 | 53665 | 850 | 113507 | 6500 | 313886 |
| 32 | 22024 | 200 | 55059 | 900 | 116798 | 7000 | 325735 |
| 33 | 22365 | 210 | 56419 | 950 | 120019 | 7500 | 337175 |
| 34 | 22702 | 220 | 57747 | 1000 | 123116 | 8000 | 348224 |
| 35 | 23033 | 230 | 59045 | 1050 | 126157 | 8500 | 358943 |
| 36 | 23360 | 240 | 60314 | 1100 | 129127 | 9000 | 369349 |
| 37 | 23682 | 250 | 61558 | 1150 | 132028 | 9500 | 379470 |
| 38 | 24000 | 260 | 62777 | 1200 | 134867 | 10000 | 389328 |



Digitized by Google

28. Pour prendre un exemple des usages de cette Table, supposons le point de vue d'un tableau élevé de 80 mètres au-dessus du niveau de la mer, ou de la surface d'une vaste plaine, la distance centrale étant de 5 mètres. Nous voyons dans la Table que le rayon d'horizon visuel correspondant à cette hauteur égale 34 822 mètres. La distance métrique des deux horizons est 160 mètres, double de 80 mètres; et nous trouverons à quelle valeur se réduit en perspective cette distance, en posant la proportion (17)

$$34822 : 160 :: 5 : x, \quad \text{d'où } x = 0{,}023.$$

Ainsi, la ligne d'horizon visuel doit être représentée sur la toile à 23 millimètres au-dessous de la ligne d'horizon perspectif. Une colonne haute de 160 mètres, placée sur la limite apparente de l'horizon visuel et dont le sommet ne serait pas élevé par la réfraction, atteindrait exactement le plan d'horizon perspectif, et sa grandeur perspective serait de $0^m,023$. Cette valeur est appréciable, même à la distance de 5 mètres, qu'on suppose être celle du spectateur au tableau.

Les méthodes pratiques qui seront exposées plus loin prescrivent de tracer la ligne d'horizon perspectif préalablement à toute opération sur la toile. Pour distinguer cette ligne de celle d'horizon visuel, on voit qu'il suffit de résoudre une proportion entre des nombres toujours fort simples, en se servant de la Table ci-dessus.

La même Table est susceptible de quelques autres usages étrangers à la perspective, mais qui ont de l'intérêt en eux-mêmes. Elle peut servir notamment à déterminer la distance d'un objet, dont la hauteur est connue, à un spectateur placé au niveau de la mer, lorsque l'extrémité seule de l'objet se montre à l'horizon. On le conçoit en supposant le spectateur en D (*fig.* 8), et considérant A′ comme l'extrémité d'un objet A′B. Ainsi, par exemple, le mont Saint-

Digitized by Google

Michel ayant une hauteur de 700 mètres, un spectateur placé en mer et à fleur d'eau le découvre à la distance de 103 006 mètres; mais, de la pointe d'un mât de vaisseau élevée de 50 mètres au-dessus de l'eau, on le découvrirait à la distance de 106622 mètres, comme si le spectateur était au niveau de la mer, et que le mont eût 50 mètres de plus.

## § II.

### DES POLYGONES ET DES LIGNES COURBES EN PERSPECTIVE.

29. Les propriétés des polygones, et par suite celles des lignes courbes, en perspective, dérivent de ce qui vient d'être établi pour les lignes droites isolées. Nous nous renfermerons, à leur égard, dans un petit nombre de remarques.

La perspective d'un polygone et de toute figure rectiligne est généralement une figure de même espèce quant au nombre de ses côtés. Si l'on conçoit une surface pyramidale ayant pour base le polygone proposé et pour sommet le point de vue, la perspective est l'intersection de cette surface par le plan du tableau.

Dans le cas où le plan du polygone passe par le point de vue, la perspective se réduit à une droite, la pyramide se réduisant elle-même à une surface plane. Mais, si le plan est parallèle au tableau, la perspective est un second polygone dont les côtés sont proportionnels et parallèles à ceux du premier (17), et qui par conséquent lui est semblable.

Les diagonales d'un polygone qui se rencontrent en un même point dans l'espace doivent évidemment jouir de la même propriété en perspective. On se sert de cette remarque pour déterminer sur le tableau le point correspondant au centre de certains polygones. Ainsi, le centre d'un



Digitized by Google

parallélogramme a sa perspective au point de rencontre des diagonales du quadrilatère qui le représente. Ce quadrilatère est un trapèze, lorsque deux côtés du parallélogramme sont parallèles au tableau, et la petite base du trapèze correspond toujours au côté le plus éloigné du plan central (17).

La perspective d'un polygone régulier est généralement un polygone irrégulier. Des polygones réguliers ayant même centre et leurs côtés parallèles, ces côtés ne seront plus parallèles sur le tableau (10); mais les sommets situés sur les mêmes rayons ne cesseront pas d'être en ligne droite entre eux et avec le point qui représente le centre.

30. Le cas d'un triangle isocèle dont la base est horizontale se présente souvent dans les édifices. En perspective, le triangle perd sa symétrie : si l'on suppose son plan vertical, la droite qui représente sa hauteur ne cesse pas d'être verticale, mais elle divise inégalement la base, dont la partie la plus rapprochée du plan central doit être la plus grande (23); les points accidentels de ses côtés sont situés à égale distance au-dessus ou au-dessous de la ligne d'horizon et sur une même verticale; d'où résulte cette conséquence : selon que le sommet du triangle est au-dessus ou au-dessous du plan d'horizon, le côté le plus voisin du plan central est celui dont la direction perspective s'écarte ou s'approche le plus de la direction verticale; et si le sommet est dans le plan d'horizon, les inclinaisons sont égales.

Quant aux longueurs des mêmes lignes, si le sommet du triangle est au-dessous du plan d'horizon, le côté le plus rapproché a sa perspective la plus longue. L'inégalité diminue à mesure que le triangle s'élève; s'il prend une position où sa base soit dans le plan d'horizon, le côté le plus rapproché se montre encore le plus long sur le tableau,

Digitized by Google

puisque la perspective de la base, devenue horizontale, est toujours divisée inégalement par la verticale; mais, le triangle continuant à s'élever, il arrive un instant où les deux côtés deviennent égaux, après quoi le plus rapproché se montre le plus court. On conçoit même que sa perspective se réduirait à un point, s'il prenait une position telle que son prolongement passât par le point de vue.

Si le triangle, au lieu d'être vertical, avait une inclinaison quelconque sur l'horizon, il serait également facile, par la considération des points accidentels de ses côtés, de prévoir les particularités que peut offrir sa perspective.

31. Les rayons visuels qui partent des divers points d'une ligne courbe composent une surface conique dont l'intersection avec le plan du tableau est sa perspective. Le *cône perspectif* d'une courbe doit être assimilé à la surface pyramidale d'une figure rectiligne, la courbe elle-même n'étant qu'un polygone d'une infinité de côtés. La perspective se réduit à une droite, lorsque le plan de la courbe passe par le point de vue, et c'est une courbe semblable géométriquement à la proposée, dans le cas du parallélisme de ce plan avec le tableau.

De quelque nature que soit une courbe, toute droite qui lui est tangente dans l'espace l'est également en perspective, et le point de contact sur le tableau correspond au point de contact dans l'espace. On emploie avec avantage des tangentes circonscrites à une courbe pour mieux assigner le sens de courbure et ce qu'on appelle le *cours de la courbe*.

Étant donnée une courbe plane, on peut déterminer à priori, du moins par des conceptions théoriques, les points correspondants à ceux de sa perspective où les tangentes sont horizontales, verticales ou de toute autre direction

Digitized by Google

voulue. En effet, imaginons par le point de vue et dans le plan central, des droites parallèles aux directions que doivent avoir les tangentes, par exemple une verticale et une horizontale. Si, du point de rencontre de chacune de ces droites avec le plan de la courbe proposée, on lui mène des tangentes, elles détermineront par leurs contacts les points demandés; car, d'abord, ces tangentes auront leurs perspectives tangentes à celles de la courbe; ensuite, celles qui sont menées par le pied de la verticale auront leurs perspectives verticales, puisque les plans perspectifs seront eux-mêmes verticaux. De même, les autres auront leurs perspectives horizontales, parce que leurs plans perspectifs couperont le plan central suivant l'horizontale conçue par le point de vue, et par conséquent elles couperont le tableau suivant une horizontale.

On voit donc qu'il suffit de concevoir par le point de vue, dans le plan central, une parallèle à la direction voulue, et de mener, par son point de rencontre avec le plan de la courbe, des tangentes à sa circonférence.

Dans la perspective d'une courbe, nous nommerons *points culminants* les points où les tangentes seront horizontales, et *points latéraux* ceux où les tangentes seront verticales. Si la courbe est fermée et n'a pas de parties rentrantes, sa perspective aura deux points latéraux, l'un à droite et l'autre à gauche, et de même deux points culminants, l'un supérieur et l'autre inférieur. Les tangentes en ces points limiteront la courbe dans le sens horizontal et dans le sens vertical. Nous en ferons un grand usage dans les applications pratiques.

32. Quand une courbe a un caractère géométrique déterminé, l'analyse nous enseigne que sa perspective appartient aussi à une classe de courbes définies par les géomètres, et qu'en général les deux courbes, sans être semblables,

Digitized by Google

sont de même ordre. Nous nous bornerons à examiner en particulier le cas le plus élémentaire et le plus usuel, celui du cercle.

Or, si la courbe proposée est un cercle, le cône perspectif est un cône proprement dit, généralement oblique, et la perspective une *ellipse*. On nomme ainsi une figure ovale et régulière, douée de propriétés qui la caractérisent et permettent de la décrire avec certitude, dès qu'on en connaît certains éléments. L'ovale est plus ou moins allongée, a plus ou moins de largeur. Elle peut se réduire à une ligne droite, ou se transformer dans un cercle. Voici quelques-unes de ses propriétés.

Dans toute ellipse (*fig.* 9) on distingue deux droites rectangulaires AB, CD, qu'on nomme ses *axes principaux*, et par rapport auxquels la courbe est symétrique (*). Leur point d'intersection est le *centre* de l'ellipse : toute corde qui passe par le centre y est divisée en parties égales, et constitue un *diamètre*.

Il résulte manifestement de cette symétrie, que deux tangentes menées par les extrémités d'un même diamètre sont parallèles, et que, réciproquement, deux tangentes ne peuvent être parallèles qu'à cette condition. Dans ce cas, les points de contact divisent la circonférence de l'ellipse en parties égales. Deux tangentes interceptant un arc moindre que la demi-circonférence de cette courbe ne

---

(*) Au premier abord, on peut avoir quelque peine à comprendre que la courbe d'intersection d'un cône par un plan puisse être une ovale parfaitement symétrique. Il semble que, le cône ayant plus de courbure vers le sommet, la section doit aussi y avoir plus de courbure que dans la partie opposée. Mais on doit considérer que, dans celle-ci, les arêtes et par suite les éléments de surface sont coupés plus obliquement. Or, il arrive que les deux effets se compensent.

Pour de plus amples détails sur les propriétés de cette courbe, il faut recourir aux traités de Géométrie analytique.

Digitized by Google

peuvent donc être parallèles. Nous ferons usage de cette remarque.

Sur le grand axe de chaque ellipse, il y a deux points F, F′ (*fig.* 9), également distants du centre, qu'on nomme les *foyers*. Ces points jouissent particulièrement de deux propriétés remarquables. D'abord, si d'un point quelconque M de la courbe on mène aux foyers les droites MF, MF′, qui se nomment des *rayons vecteurs*, la somme de ces droites est toujours égale au grand axe AB. Aussi, étant donnés deux points, comme foyers d'une ellipse, et la grandeur de son grand axe, la courbe est complétement déterminée; on peut la décrire en fixant aux foyers les extrémités d'un cordeau égal au grand axe, et faisant courir la pointe qui doit la tracer sur la longueur de ce cordeau, de manière à le tenir constamment tendu. Ce moyen est usité par les jardiniers.

Deux rayons vecteurs quelconques MF, MF′ sont également inclinés sur la tangente au point M. Des rayons sonores, calorifiques ou lumineux, partant du point F et venant frapper la circonférence, seront donc tous réfléchis vers F′, en vertu du principe de physique sur l'égalité des angles d'incidence et de réflexion. De là, ces curieux phénomènes que l'on observe dans les chambres elliptiques. Par exemple, un corps enflammé étant placé à l'un des foyers, un morceau d'amadou s'allume à l'autre foyer. Le son le plus faible est perçu de l'un à l'autre de ces points, sans l'être dans l'espace intermédiaire.

33. Tout cercle dont le plan est parallèle au tableau a pour perspective un cercle, parce qu'un plan parallèle à la base d'un cône le coupe suivant une courbe semblable à la base : cela revient à dire que les deux axes de l'ellipse deviennent égaux. Mais la perspective est encore circulaire, dans un cas à la vérité très-particulier, savoir, lorsque le cône

Digitized by Google

perspectif est coupé par le plan du tableau, de manière à donner ce que les géomètres nomment la *section anti-parallèle du cône oblique*.

Une première condition pour que le cas arrive, c'est qu'un plan conçu par le point de vue et le centre du cercle perpendiculairement au plan de cette courbe, soit en même temps perpendiculaire au tableau. Cette condition remplie, le cercle et la perspective se trouvent coupés en parties symétriques par rapport à ce plan. Mais il faut, en outre, que l'inclinaison de l'arête du cône la plus oblique sur le plan du tableau soit égale à l'inclinaison de l'arête la plus oblique sur le plan du cercle; c'est-à-dire, que l'angle ODG (*fig.* 10) soit égal à l'angle B, en supposant que GDH représente le tableau de profil, O le point de vue, BEAF le cercle proposé : il s'ensuit d'ailleurs que l'angle OGD = BAO. On conçoit effectivement qu'alors la section se trouve, à l'égard des arêtes, dans une position semblable à celle de la base, avec cette seule différence que les arêtes les plus inclinées sur la base sont les moins inclinées sur la section, et *vice versâ*. La section est en conséquence un cercle comme la base.

34. Pour décrire une ellipse comme perspective d'un cercle, il serait avantageux de connaître à priori ses axes principaux. La Géométrie ne fournit pas de méthode simple et pratique pour cet objet; mais nous pourrons du moins, en appliquant les considérations générales du n° 31, obtenir les points latéraux et culminants, et ces points déterminent deux diamètres dont l'intersection est le centre de l'ellipse, puisque toute corde qui joint les points de contact de deux tangentes parallèles est un diamètre. Ainsi, d'après le n° 31, nous concevrons par le point de vue, dans le plan central, une verticale et une horizontale, et par le point de rencontre de chacune de ces droites avec le

Digitized by Google

plan du cercle, une couple de tangentes à sa circonférence; les points de contact correspondront aux points culminants ou latéraux: les cordes joignant respectivement les premiers correspondront à deux diamètres de l'ellipse, et leur point d'intersection au centre de cette courbe.

Nous ferons ici une remarque qui servira à confirmer ce qui précède. Soit O (*fig.* 11) un point quelconque de l'intersection du plan central par le plan d'un cercle. Les deux tangentes OA, OB auront leurs perspectives parallèles (12); la corde AB correspondra à un diamètre de l'ellipse, et le point correspondant au centre de cette courbe sera quelque part sur AB.

Si, par divers points O′, O″, O‴,... de la même droite on mène d'autres tangentes, toutes les lignes de jonction des points de contact A′B′, A″B″,... devront, par la même raison, contenir le point correspondant au centre de l'ellipse; donc, il faudra qu'elles se coupent toutes en un même point K. Or, ce résultat s'accorde avec la propriété géométrique du pôle d'un cercle relatif à une droite située dans son plan, propriété qui consiste en ce que, si des divers points de cette droite on mène au cercle des couples de tangentes, toutes les lignes des points de contact se croisent en un même point, situé sur le rayon perpendiculaire à cette droite, ou sur le prolongement de ce rayon. La réciproque est d'ailleurs une conséquence nécessaire.

35. Lorsque le plan du cercle est horizontal, les extrémités de son diamètre perpendiculaire au plan du tableau correspondent aux points culminants de sa perspective; car les tangentes aux premiers points étant horizontales et parallèles au tableau, leurs perspectives sont horizontales (8). Ceux qui correspondent aux points latéraux s'obtiennent par des tangentes menées du pied de la verticale abaissée du point de vue sur le plan du cercle. Si l'on sup-

Digitized by Google

pose, en outre, que le centre du cercle soit dans le plan normal, les points latéraux et culminants ainsi obtenus détermineront les axes principaux de l'ellipse, car les diamètres aboutissant à ces points auront la propriété d'être perpendiculaires aux tangentes menées par leurs extrémités, et les axes principaux sont seuls dans ce cas.

Ainsi (*fig.* 12) soient I le centre du cercle, O le pied de la verticale abaissée du point de vue, CD le diamètre perpendiculaire au tableau, OA, OB les deux tangentes menées du point O. Les deux droites CD, AB correspondent aux axes principaux de l'ellipse, et leur intersection K est le point dont la perspective est le centre de cette courbe.

Dans la même hypothèse, on peut se demander quel est le plus grand des deux axes, c'est-à-dire dans quel sens est l'allongement de l'ellipse. Cela dépend de la distance du cercle et de l'élévation ou de l'abaissement du point de vue à l'égard de son plan. L'axe vertical croît rapidement lorsque le cercle se rapproche du plan central (25); il croît aussi lorsque le plan du cercle s'éloigne du point de vue (26), en restant horizontal. L'axe horizontal correspond à une corde AB variable dans le cercle avec sa distance, mais toujours parallèle au tableau et dont la grandeur perspective n'est pas sujette à varier rapidement. Si donc le cercle est à un certain éloignement ou le point de vue assez rapproché de son plan, le grand axe de l'ellipse sera l'axe horizontal. L'allongement n'a lieu dans aucun sens, si les conditions du n° 33 sont satisfaites, puisque l'ellipse devient alors circulaire.

36. Ce qui précède fait voir que le centre d'un cercle ne peut correspondre au centre de l'ellipse que dans le seul cas où son plan est parallèle au tableau. Le centre de l'ellipse, dans tout autre cas, correspond à un point de la surface du cercle plus rapproché du plan central. Si, au

Digitized by Google

lieu d'un cercle, on en conçoit plusieurs concentriques et dans un même plan, leurs perspectives sont des ellipses qui s'enveloppent sans avoir le même centre. En effet, soient (*fig.* 13) I le centre commun des cercles, O un point quelconque de l'intersection de leur plan avec le plan central, CD le diamètre qui joint les points de contact des tangentes parallèles à ce dernier plan. Décrivons sur OI, comme diamètre, un cercle dont les rencontres avec les cercles proposés seront, comme on sait, les points de contact des tangentes menées du point O. Les points K′, K″, K‴, rencontres de CD avec les lignes des points de contact, correspondront aux centres des ellipses. Or, ces points ne sauraient se confondre, et il est visible qu'ils sont d'autant plus éloignés du plan central qu'ils appartiennent à des cercles plus petits.

37. L'horizon visuel d'un spectateur en pleine mer est un cercle ayant pour centre le pied de la verticale abaissée du point de vue sur son plan. Sa perspective ne peut, par sa nature même, avoir des points latéraux, puisque d'un point intérieur à un cercle on ne peut lui mener des tangentes. L'arc de sa circonférence, qui entre dans le champ d'un tableau, dépend du rapport qui existe entre la distance centrale et la largeur du tableau, et, dans les conditions ordinaires, il peut varier de 25 à 40 degrés : un arc de cette graduation, dans un cercle, a quelquefois une courbure très-notable en perspective; mais ici, le cercle est si grand, en comparaison de la distance de son plan au plan d'horizon, que ces deux plans coïncident sensiblement pour le spectateur, et l'arc elliptique diffère, en conséquence, extrêmement peu d'une ligne droite. Nous déterminerons cependant sa courbure dans un exemple particulier (79).

38. Je terminerai ce sujet par une observation, quelque superflue qu'elle puisse être pour le lecteur pénétré des principes les plus élémentaires de la science. Concevons

Digitized by Google

un cercle dans un plan perpendiculaire à la droite qui va de son centre au point de vue. Cette courbe, sans l'interposition du tableau, se montrerait à l'œil dans sa parfaite régularité; or, la représentation perspective des objets devant produire les mêmes apparences que les objets eux-mêmes, on pourrait croire, au premier abord, que la perspective doit aussi être un cercle; et cependant nous savons que c'est une ellipse. Mais cette ellipse sera redressée par sa position relative au point de vue, et elle se montrera parfaitement circulaire au spectateur placé en ce point. Il y aura donc dans le tableau une *anamorphose*, puisque c'est ainsi qu'on nomme ces illusions d'optique qui donnent une apparente régularité à des figures plus ou moins irrégulières, en raison de leur position à l'égard du spectateur.

Au contraire, un cercle mis à la place de l'ellipse aurait une apparence elliptique.

Cette remarque s'applique également à des polygones réguliers : et, si elle paraît peu nécessaire en elle-même, elle est du moins de nature à faire comprendre combien il importe de se rappeler constamment les conditions géométriques d'après lesquelles doivent s'apprécier les effets de la perspective.

## § III.

### DES POLYÈDRES ET DES SURFACES COURBES EN PERSPECTIVE.

39. Les surfaces polyédriques sont celles dont la considération est la plus simple. Un polyèdre étant donné, il importe d'abord, pour sa mise en perspective, de reconnaître quelles sont ses faces visibles du point de vue, et d'assigner en conséquence la ligne polygonale qui forme son contour apparent. Or, si le polyèdre est totalement convexe, c'est-

Digitized by Google

à-dire s'il n'a que des angles saillants, chacune de ses faces visibles est caractérisée par cette condition, que si on la prolongeait indéfiniment elle cacherait tout le solide. Deux faces parallèles ne sont jamais visibles à la fois; un spectateur convenablement placé peut apercevoir toute la toiture d'un pavillon, mais son regard n'embrassera jamais plus de deux de ses quatre murs.

Une surface polyédrique à angles rentrants est décomposable en plusieurs polyèdres convexes, et les faces visibles de ces polyèdres particuliers composent celles du polyèdre total, pourvu qu'elles ne soient pas cachées par leur mutuelle interposition.

On peut employer un procédé géométrique pour reconnaître si une face voisine de la ligne de contour est cachée par une autre face contiguë. Il suffit de prendre un point quelconque dans l'intérieur de la première, de le joindre au point de vue par une droite, et de construire la rencontre de cette droite avec le plan de la seconde face. Selon que le point de rencontre se trouve intérieur ou extérieur à celle-ci, la face est cachée ou ne l'est pas.

Les faces d'un polyèdre se présentent généralement au spectateur sous des degrés d'obliquité fort inégaux : il en résulte que les unes, perpendiculaires aux rayons visuels, ou peu inclinées sur ces lignes, sont aperçues avec une grande netteté dans tous les détails qu'elles peuvent contenir; tandis que d'autres, très-obliques aux rayons, ne sont vues qu'imparfaitement. Ces surfaces sont donc, en réalité, plus ou moins visibles; mais nous ne faisons aucune différence entre elles sous ce rapport, et nous nous bornons à les distinguer de celles qui sont complétement invisibles.

Souvent nous concevrons la perspective d'un polyèdre tout en entier, comme s'il était diaphane, ou plutôt réduit à ses arêtes, et nous représenterons, en les ponctuant dans les figures, les lignes invisibles. Dans tous les cas, il est

Digitized by Google

permis, pour les opérations de perspective linéaire, de ne considérer dans les surfaces polyédriques que leurs arêtes, c'est-à-dire des assemblages de lignes droites, et leurs propriétés se trouvent essentiellement comprises dans ce qui a été précédemment exposé.

40. La perspective d'une surface courbe est celle de son contour apparent pour le spectateur placé au point de vue. En général, le contour apparent est formé, soit en totalité, soit en partie, de lignes qui ne sont pas invariablement inhérentes à la surface comme les arêtes d'un polyèdre, mais qui varient dès que le spectateur se déplace. On le détermine en concevant une surface conique ayant son sommet au point de vue, et enveloppant tangentiellement la proposée. La ligne cherchée est formée par la série des points de contact.

Si la surface est de la nature de celles qui rentrent sur elles-mêmes et présentent une certaine courbure dans tous les sens, comme une sphère ou un ellipsoïde, il est possible de déterminer à priori les points de son contour apparent où les tangentes ont en perspective une direction donnée, par exemple horizontale ou verticale. A cet effet, nous concevrons par le point de vue, dans le plan central, une parallèle à cette direction, et, suivant cette parallèle, des plans tangents à la surface; les contacts seront les points demandés. Pour nous en convaincre, observons d'abord que toute droite située dans un de ces plans aura sa perspective tangente au contour apparent de la surface, parce que chacun de ces plans, passant par le point de vue, est lui-même le plan perspectif de toutes les droites qu'il contient, et, parmi ces droites, on en conçoit au moins une tangente à la ligne de contour. D'une autre part, les intersections des mêmes plans avec le plan du tableau sont nécessairement parallèles à

Digitized by Google

la droite du plan central par laquelle nous les faisons passer.

En réalisant cette conception, nous obtiendrons spécialement les points culminants et latéraux (31) de la perspective de la surface, ou, du moins, ceux qui leur correspondent dans l'espace. Pour les premiers, la droite menée dans le plan central sera horizontale, et, pour les seconds, elle sera verticale.

Dans le cas où la ligne de contour est un cercle ou une courbe plane quelconque, l'opération que nous venons de concevoir coïncide, au fond, avec celle du n° 31.

41. Le contour apparent d'une sphère est un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite qui va du centre au point de vue. Le rayon de ce cercle est moindre que celui de la sphère, et le spectateur ne peut voir à la fois tout un hémisphère; mais les deux rayons approchent d'autant plus d'être égaux que la sphère est plus petite ou plus éloignée. A une distance infinie ils deviennent égaux.

La perspective de la sphère est donc une ellipse, dont le centre d'ailleurs ne correspond pas à celui de la sphère, non plus qu'à celui du cercle de contour (36).

Les cercles de la sphère qui ne rencontrent pas le cercle de contour dans l'espace ne le rencontrent pas non plus sur le tableau. Un grand cercle peut être dans ce cas, et nous apparaître enveloppé par le cercle de contour. Si, de notre degré de latitude, nous pouvions apercevoir l'équateur du globe terrestre, il s'offrirait à nos yeux comme une courbe enveloppée de toutes parts, et même à de grandes distances, par notre horizon visuel. Il en serait ainsi de notre horizon rationnel; la longueur de son rayon serait comprise dans un angle optique de 45 degrés, tandis que celui de notre horizon visuel soutend un angle presque droit.

Tout cercle de la sphère qui rencontre le cercle de con-

Digitized by Google

tour donne, sur le tableau, une ellipse enveloppée par la perspective du contour, mais ayant avec elle deux points de contact correspondant aux points de rencontre dans l'espace.

Si la sphère est très-éloignée, et sa distance considérée comme infinie, le contour apparent devient un grand cercle; sa perspective est une ellipse dont le centre coïncide avec la perspective du centre de la sphère. Tous les cercles parallèles entre eux sont représentés par des ellipses géométriquement semblables.

42. Dans les traités de Géométrie, on figure des sphères à l'égard desquelles on s'écarte des lois de la perspective, pour faciliter l'intelligence des démonstrations. La *fig.* 14 en est un exemple : comme représentation perspective d'une sphère et d'un système de cercles parallèles, elle est fausse, quelque part où l'on place le point de vue. Car, le contour étant circulaire, et le diamètre perpendiculaire au plan des cercles dans l'espace étant aussi un diamètre de ce contour, il faut que la sphère soit à une distance infinie, et que les plans des cercles soient perpendiculaires au tableau. Mais alors les perspectives de ces courbes devraient se réduire à des lignes droites, tandis qu'on en a fait des ellipses.

43. Une mappemonde est une représentation perspective de la surface du globe terrestre, divisée en deux hémisphères. Le plus ordinairement, on prend pour plan du tableau le plan du premier méridien, et le point de vue est le point de l'équateur situé à 90 degrés de ce méridien, sur l'hémisphère opposé. Il est vrai que le spectateur, placé au point de vue, apercevrait les lignes géographiques dans une position renversée, comme celles qui sont vues par transparence sur le revers d'une surface : mais, le tableau restant le même, la position sera redressée si le spectateur se transporte à l'autre extrémité du diamètre. D'ailleurs, cet échange des points de vue est permis, car ils sont tous les



Digitized by Google

deux sur le même axe de perspective, et à la même distance du tableau. Or, quand un tableau est transparent, deux points de vue, placés dans ces conditions, supposent les mêmes objets dans l'espace, mais disposés inversement.

Ce mode de représentation est généralement adopté, parce qu'il a l'avantage de donner des cercles pour les perspectives de tous ceux qui sont tracés à la surface de la sphère. Cette propriété sera démontrée, particulièrement en ce qui concerne les méridiens et les parallèles à l'équateur (88).

44. Le cylindre et le cône droits, à bases circulaires, sont des surfaces très-usitées dans la perspective, parce qu'elles le sont dans les arts. La surface conique dont l'intersection avec le tableau forme la perspective d'un cylindre est complexe : elle se compose de deux plans tangents et de deux cônes ou portions de cônes enveloppant les arcs visibles des bases. Le contour apparent de la surface se compose en conséquence de deux arêtes et de deux arcs de cercle, et sa perspective de deux droites comprenant tangentiellement deux arcs elliptiques. Je dis *tangentiellement*, car il est évident que, si les perspectives des bases étaient complètes, elles devraient être totalement enveloppées par les droites.

Voici d'ailleurs le moyen que l'on imagine pour obtenir les arêtes de contour. On mène par le point de vue une parallèle à la génératrice, jusqu'à la rencontre du plan de l'une des bases et du point de rencontre des tangentes à cette base. Ces tangentes sont les traces des deux plans tangents ci-dessus, et par suite leurs contacts déterminent les arêtes de contact. L'opération s'appliquerait également à un cylindre oblique.

Nous remarquerons que, les arcs interceptés étant nécessairement moindres que des demi-circonférences, le spec-

Digitized by Google

tateur ne peut voir toute une moitié de la surface convexe. Mais il aperçoit une base entière lorsque le point de vue n'est pas compris entre les plans des deux bases.

Si les arêtes du cylindre ne sont pas parallèles au tableau, elles concourent en perspective, et, dans ce cas, si les surfaces des bases sont invisibles, les arcs elliptiques se tournent mutuellement leur concavité ; cela résulte évidemment de la position qu'auraient les courbes entières : l'un des arcs est donc plus petit et l'autre plus grand qu'une demi-ellipse. Mais, si l'une des bases est visible, les deux arcs interceptés sont concaves vers le point de concours des arêtes, et ils sont moindres que des demi-ellipses.

Enfin, dans le cas où les arêtes sont parallèles au tableau, les arcs des bases sont toujours représentés par des demi-ellipses.

45. La surface conique qui détermine la perspective d'un cône est complexe aussi : elle consiste dans deux plans tangents et un cône ou une portion de cône. Sa perspective se compose donc de deux droites correspondantes aux arêtes de contact, et d'un arc elliptique qu'elles comprennent tangentiellement.

Pour obtenir les arêtes de contour, on conçoit une droite allant du sommet au point de vue, c'est-à-dire le rayon visuel du sommet du cône, et par sa rencontre avec le plan de la base, deux tangentes dont les contacts déterminent les arêtes demandées : car la droite ainsi conçue est l'intersection des deux plans tangents à la surface, et les tangentes, les traces de ces plans dans le plan de la base.

Si toutefois le rayon visuel était parallèle au plan de la base, la rencontre n'aurait plus lieu, mais les tangentes devraient alors être parallèles à cette même droite et seraient déterminées par cette condition.

La grandeur de la portion visible de la surface convexe,



Digitized by Google

et celle de l'arc elliptique qui lui correspond sur le tableau, dépendent de plusieurs circonstances qui vont être examinées.

Admettons d'abord que le point de vue et le sommet soient situés d'un même côté par rapport au plan de la base. Si le premier point est beaucoup plus éloigné que le second de ce plan, il peut arriver que le rayon visuel du sommet passe par l'intérieur de la base; dans ce cas, les tangentes et les plans tangents ne sont plus possibles : c'est qu'en effet il n'y a plus de contour apparent, la surface convexe est totalement visible.

Que le point de vue se rapproche graduellement du plan de la base suivant une perpendiculaire, et l'on conçoit sans peine ce qui en résulte. Le rayon visuel rencontre bientôt le plan de la base en des points extérieurs à la courbe et qui s'éloignent; l'arc non intercepté par les tangentes menées de chacun de ces points est l'arc visible de la base, et il détermine la portion visible de la surface convexe. Or, cet arc décroît sans cesse; il se réduit à une demi-circonférence lorsque le rayon visuel devient parallèle au plan de la base, et le spectateur aperçoit une moitié de la surface.

A partir de cette position, les rencontres ont lieu en deçà du cône, en des points d'abord très-éloignés et qui se rapprochent; mais alors l'arc visible est celui qu'interceptent les tangentes, et cet arc diminue. Le point de vue poursuivant son mouvement peut se placer dans la surface même du cône, ou le prolongement de cette surface au delà de la base, et l'arc se réduit à un point. Enfin, s'il pénétrait dans l'intérieur du cône, on serait ramené au cas où il n'y a pas de contour apparent.

Nous voyons, en conséquence, d'après quelles conditions l'œil du spectateur embrasse la totalité, une moitié, une portion plus ou moins grande de la surface convexe d'un cône.

Digitized by Google

On peut avoir à considérer la portion de surface intérieure qui est visible dans un cône creux ouvert à sa base. Or, les deux portions visibles des surfaces extérieure et intérieure sont limitées aux mêmes points sur la circonférence de la base; car la première surface ne commence à devenir visible qu'aux points où la seconde cesse de l'être. Mais, dans cette délimitation, la surface intérieure n'est considérée qu'à sa base; en général, à mesure qu'elle s'étend vers le sommet, elle devient invisible par l'interposition de la surface extérieure visible.

Quant à l'arc elliptique qui représente sur le tableau l'arc intercepté par les tangentes, sa grandeur relative, dans les mêmes hypothèses que précédemment, diminue en même temps que celle de l'arc dans l'espace; mais il surpasse une demi-ellipse jusqu'à ce que le point de vue ait atteint le plan de la base; dans ce dernier cas, il se réduit à une droite; à partir de là, il change le sens de sa courbure en présentant sa concavité vers le sommet, et la base entière devient visible.

Il peut être utile de remarquer que les tangentes à l'arc elliptique, qui forment la perspective des arêtes de contour, sont aussi la perspective des deux tangentes à la base du cône que nous avons précédemment considérées. La perspective du sommet est donc également celle du point de départ ou de jonction de ces tangentes; elle devient, sous ce rapport, une perspective imaginaire, lorsque ce dernier point est en arrière du plan central (13).

46. Ce qui vient d'être dit s'applique également à un tronc de cône, chacune de ses bases pouvant être considérée comme celle d'un cône entier. Mais nous ajouterons ici quelques remarques importantes.

Certaines surfaces sont susceptibles de se décomposer en troncs de cônes, se succédant suivant une loi quelconque

Digitized by Google

de continuité. Or, l'article précédent établit les conditions nécessaires pour que les portions visibles de ces zones, aussi bien que les courbes qui représentent leurs bases sur le tableau, aient une grandeur relative déterminée.

Pour mieux fixer les idées à cet égard, supposons que toutes les zones aient un même axe, que cet axe soit vertical, et considérons-en une dont la petite base soit supérieure à la grande, de manière que dans cette partie la surface se rétrécisse de bas en haut. Le spectateur apercevra plus ou moins que la moitié de la surface convexe de cette zone, selon que le point de vue sera plus ou moins élevé que le sommet du cône entier formé par le prolongement de la zone. L'arc elliptique correspondant à une base sera plus ou moins qu'une demi-ellipse, selon que le même point sera plus ou moins élevé que le plan de cette courbe. Les conséquences seraient inverses, si la petite base était inférieure à la grande.

47. Ces considérations s'appliquent spécialement aux surfaces de révolution. En effet, on peut se représenter toute surface de cette nature comme formée par la succession d'une infinité de zones de même axe et d'une hauteur infiniment petite, c'est-à-dire comprises entre des plans parallèles infiniment rapprochés, et chacune de ces zones comme la surface convexe ou concave d'un tronc de cône.

Cela posé, admettons que, par des opérations fondées sur les remarques précédentes, on ait déterminé sur la base de chaque zone les points qui limitent sa portion visible : ces points appartiennent au contour apparent de la surface de révolution proposée ; car les cônes entiers dont les zones font partie sont tangents à la surface. Tout plan tangent à l'un des cônes et conçu par le point de vue est donc aussi tangent à la surface et passe par un point de son contour apparent.

Digitized by Google

Toutefois, pour être visibles, il faut encore que les points dont il s'agit ne se trouvent pas masqués par le renflement de la surface dans quelque autre de ses parties.

Cette propriété est digne de remarque en elle-même, et nous en ferons d'utiles applications. On peut d'ailleurs l'envisager d'une manière plus générale : étant donnée une surface quelconque, si l'on conçoit une autre surface qui la touche suivant une certaine ligne et dont on puisse obtenir le contour apparent, les points de rencontre de ce contour avec la ligne de contact appartiennent au contour apparent de la proposée.

48. Voici une autre propriété qui découle des mêmes considérations et doit nous servir également dans la pratique.

Si l'on fait abstraction de la hauteur infiniment petite des zones, elles se réduisent aux circonférences de leurs bases, que nous supposerons figurées dans toute l'étendue de la surface. Or, sur le tableau, la ligne de contour apparent aurait la propriété d'être à la fois tangente à toutes ces courbes, si elles étaient mises en perspective, et cette condition suffirait pour la déterminer. D'ailleurs elle serait *enveloppante* ou *enveloppée*, selon qu'elle représenterait une ligne de contour extérieure ou intérieure dans l'espace. Les courbes ainsi figurées sur la toile indiqueraient en outre le sens de courbure de la surface, à peu près comme les hachures dont on fait usage dans le dessin pittoresque. Mais il faut ajouter qu'elles ne seraient pas distinctes pour l'œil, si les intervalles qui les séparent dans l'espace étaient en toute rigueur infiniment petits, comme la théorie les suppose.

Observons encore que, dans la même hypothèse, la ligne de contour est formée par les intersections successives des courbes sur le tableau. Pour s'en convaincre, il suffit de

Digitized by Google

considérer deux ellipses consécutives, en les supposant entières : il arrive nécessairement qu'elles s'enveloppent sans se toucher, ou en se touchant intérieurement, ou qu'elles se coupent. Dans les deux premiers cas, le tronc de cône compris entre les courbes, dans l'espace, n'a pas de contour apparent et ne peut contribuer à former celui de la surface; mais, si les ellipses se coupent, les deux points d'intersection déterminent l'arc de l'une de ces courbes qui est caché par l'autre et par ceux qui lui succèdent, et ces points font partie du contour apparent, pourvu toutefois que l'interposition de la surface dans une autre région ne les rende pas invisibles.

En général, quelle que soit la nature ou la loi de génération d'une surface, lorsqu'on la conçoit formée par succession de diverses lignes, et que ces lignes sont obtenues en perspective, le contour apparent sur le tableau résulte des intersections consécutives de ces lignes, en même temps qu'il les enveloppe ou qu'il est enveloppé par elles tangentiellement.

Nous appliquerons cette propriété aux surfaces de révolution et aux surfaces gauches.

49. Quelquefois le contour apparent d'une certaine portion de surface se projette perspectivement sur une autre portion de la même surface dans laquelle il finit par se fondre insensiblement. La scotie d'un piédouche (*fig.* 15), formée par la révolution d'un arc d'ellipse autour d'un axe vertical, nous en offre un exemple. $a\omega$ est une branche du contour apparent qui ne se prolonge pas indéfiniment, mais qui se termine quelque part en $\omega$, que j'appellerai un point de *désinence*.

Cette particularité résulte d'un changement de courbure dans la surface, laquelle, après avoir tourné sa concavité vers l'axe de révolution, devient convexe vers cette ligne.

Digitized by Google

En effet, ces courbures en sens inverse donnent naissance à deux lignes de contour apparent $a\omega$ et $\omega m\omega'$, la première extérieure, la seconde intérieure et masquée par l'interposition de la partie antérieure, et ces lignes font leur jonction en $\omega$.

Pour nous en convaincre, imaginons qu'un rayon visuel glisse le long du contour $a\omega$ : dans chacune de ces positions successives, ce rayon visuel, suffisamment prolongé, pourra rencontrer le reste de la surface en un point situé au delà de son contact. Or, à mesure qu'il descendra, le point d'intersection se rapprochera du point de contact, et ils se confondront l'un et l'autre en $\omega$, lorsque le rayon visuel sera parvenu à ce point. Le point de désinence est ainsi caractérisé par la condition d'être à la fois, pour le rayon visuel, un point d'intersection et un point de tangence avec la surface.

Un autre rayon visuel, qui décrirait pareillement le contour intérieur et invisible $\omega m\omega'$, rencontrerait, dans chaque position, la partie antérieure de la surface, et, s'il s'avance de droite à gauche, les deux points de contact et d'intersection, se rapprochant graduellement, finiront aussi par se confondre. Or, le point de réunion sera encore $\omega$, car il est assez évident que, vers la gauche de la surface, il n'y a qu'un point qui puisse être à la fois point de contact et d'intersection.

Ajoutons que le rayon visuel en $\omega$, pouvant être également considéré comme s'il rencontrait $a\omega$ en deux points infiniment rapprochés, forme une tangente à cette courbe. En d'autres termes, l'élément de la courbe de contour, au point de désinence, se trouve dirigé vers le point de vue.

Ce que nous disons pour $\omega$ peut se répéter pour $\omega'$.

50. Les courbes $a\omega$, $\omega m\omega'$ se touchent par un contact très-intime ; et cependant elles ne se prolongent pas l'une

Digitized by Google

l'autre, mais elles forment en $\omega$ une pointe de la nature de celles que les géomètres nomment des rebroussements. Le rayon visuel, qui aurait parcouru la branche visible $a\omega$, devrait, en quelque sorte, rétrograder pour décrire $\omega m\omega'$ par une continuation de son mouvement. Si donc, dans la recherche de $a\omega$, on avait obtenu sur le tableau, par des moyens quelconques, des points du contour correspondants à diverses hauteurs verticales, et en descendant successivement, on reconnaîtrait que le point $\omega$ serait dépassé, dès qu'on en obtiendrait dans une direction rétrograde.

On arriverait aux mêmes conséquences par la considération des sections horizontales dans lesquelles la surface peut être décomposée. A cet effet, parcourons la série des ellipses qui les représentent sur le tableau, en descendant verticalement. Aussi longtemps que leurs intersections consécutives sont des points visibles, elles appartiennent à la ligne de contour extérieur $a\omega$ ou $a'\omega'$. Mais cela ne peut avoir lieu par tous ces points; car, les courbes s'élargissant, elles tendent de plus en plus à se séparer et à devenir enveloppantes. Or, ici comme dans tous les cas semblables, il y a une loi de continuité qui ne permet pas que cette séparation se fasse brusquement. Il y aura un cas intermédiaire où deux ellipses consécutives se toucheront, sans se couper, en un point $m$ invisible, et, dès lors, il faudra que les intersections consécutives rebroussent chemin à partir d'un certain point $\omega$, pour se rapprocher graduellement du point $m$.

On comprend d'ailleurs que les ellipses se touchent de plus en plus obliquement. Il en résulte que la ligne de contour touche très-obliquement ces courbes dans le voisinage de $\omega$, et qu'elle semble même se confondre avec elles dans une certaine étendue. On s'explique, par cette considération, l'apparence un peu vague et indéterminée du point de désinence.

Digitized by Google

51. Examinons la surface engendrée par la révolution d'un demi-cercle autour d'un axe vertical (*fig.* 16). C'est un tore auquel manque sa nappe extérieure. Si la surface est convenablement placée à l'égard du point de vue, nous y remarquerons encore les lignes $a\omega$, $a'\omega'$, $\omega\omega'$, et, de plus, une ligne visible de contour intérieur $\delta\delta'$. Or on prouverait, par les mêmes raisonnements que ci-dessus, que cette ligne $\delta\delta'$ se termine à ses points de jonction avec les prolongements invisibles de $\omega a$ et $\omega' a'$. Ce système nous offre donc un quadrilatère formé par des lignes de contour, dont une seule est totalement invisible, et dont les sommets sont quatre points de désinence. En général, les côtés $\omega\delta$, $\omega'\delta'$ n'y sont pas parfaitement égaux; cette égalité n'a lieu qu'autant que l'axe de la surface est dans le plan normal, parce qu'alors le quadrilatère est symétrique.

Mais si le point de vue était plus élevé que nous n'avons dû le supposer, une plus grande portion de la surface intérieure deviendrait visible, et il pourrait se faire que les points de désinence disparussent. Soient $a$ et $a'$, sur les lignes $a\omega$ et $a'\omega'$, les points où les tangentes sont verticales : le cas arriverait si le point de vue s'élevait assez pour que ces points fussent visibles intérieurement. Le contour intérieur serait alors une courbe fermée, qu'un rayon visuel pourrait décrire sans discontinuité dans son mouvement.

Il est clair qu'un tore complet (*fig.* 17) doit reproduire les mêmes circonstances. Nous y trouvons, indépendamment de la ligne de contour qui l'enveloppe totalement, le même quadrilatère $\delta\omega\omega'\delta'$, dans lequel, il est vrai, les côtés $\delta\omega$ et $\delta'\omega'$ sont devenus invisibles.

A l'aide de ces exemples, on discuterait facilement tous les cas analogues qui peuvent se présenter dans les diverses espèces de surfaces.

Digitized by Google

## DES DIVERS ACCIDENTS DE LA LUMIÈRE A LA SUPERFICIE DES OBJETS.

### § Ier.

### DES OMBRES PROPRES ET DES OMBRES PORTÉES.

52. Les divers accidents de la lumière, à la superficie des objets, sont d'une considération importante dans la perspective. On conçoit particulièrement que la représentation linéaire d'un objet devient beaucoup plus complète, lorsqu'on a déterminé les lignes qui circonscrivent les portions de sa surface éclairées par un corps lumineux, et les ombres qu'il projette sur d'autres objets ou des surfaces données. La théorie mathématique des ombres et des lumières peut conduire à des questions d'un ordre très-élevé, même quand on la dégage du phénomène connu en physique sous le nom de *diffraction;* mais nous la réduirons à de simples aperçus généraux.

Deux cas principaux sont à distinguer, le corps lumineux pouvant se réduire à un point, ou avoir une étendue appréciable. Nous allons les considérer successivement.

53. Quand la surface d'un objet reçoit les rayons d'un simple point lumineux, la partie directement éclairée n'est autre que la portion de surface visible pour un spectateur placé au point lumineux; la ligne de séparation d'ombre et de lumière, ou la ligne d'*ombre propre,* est celle qui formerait dans ce cas le contour apparent, et l'*ombre portée* par un objet sur une surface donnée déterminerait sa perspective sur cette surface considérée comme celle d'un tableau. Cette analogie est évidente, et elle nous permet de restreindre beaucoup nos observations.

Digitized by Google

Mais nous ajouterons une remarque préliminaire qui peut paraître fort essentielle. L'objet n'est pas uniformément éclairé dans toute la portion de sa surface qui reçoit directement des rayons de lumière : en chaque point le degré de clarté dépend de la distance au point lumineux et de l'inclinaison de l'élément de surface sur les rayons qui y parviennent. L'inclinaison étant supposée constante, l'intensité de lumière varie en raison inverse du carré de la distance ; d'une autre part, la distance étant constante, l'élément de surface est le plus vivement éclairé lorsqu'il est dirigé perpendiculairement aux rayons, et la clarté diminue à mesure que la direction devient plus oblique (*).

D'après cela, si la surface éclairée est plane et suffisamment éloignée du point lumineux, on peut la considérer comme uniformément éclairée ; mais autrement, il y a des différences plus ou moins notables. Toutefois, dans la perspective linéaire, on est convenu de faire abstraction de ces différences, et l'on distingue seulement, à la superficie des objets, les parties qui reçoivent plus ou moins de rayons et celles qui n'en reçoivent aucun.

54. Dans l'hypothèse d'un simple point lumineux, la remarque la plus importante que nous ayons à faire est celle-ci : tous les rayons de lumière, par cela seul qu'ils émanent d'un même point dans l'espace, doivent, sur le tableau, concourir en un même point, perspective réelle ou imaginaire du premier (14). C'est ce que l'on pourra vérifier dans tout tableau où sera représenté un objet polyédrique avec son ombre portée sur une surface quelconque : il faudra que toutes les droites tirées des sommets à leurs

(*) On démontre que l'intensité de clarté est proportionnelle au sinus de l'angle compris entre la direction des rayons et l'élément de surface.

Digitized by Google

ombres concourent en un même point, sur la toile aussi bien que dans l'espace.

Lorsque le Soleil est le corps éclairant, et ce cas est de beaucoup le plus ordinaire dans la pratique, on réduit cet astre à un point situé à l'infini : ses rayons deviennent parallèles; le point accidentel de leur direction est sa perspective, réelle ou imaginaire, selon que l'astre est en avant ou en arrière du plan central, et c'est le point vers lequel doivent encore concourir tous les rayons sur le tableau.

Le Soleil étant toujours le corps éclairant, on a souvent à considérer les ombres portées sur un plan horizontal par des droites verticales ou des objets que l'on réduit à de telles droites. Or, dans l'espace, ces ombres sont parallèles et proportionnelles aux longueurs des droites : sur le tableau, elles concourent en un même point de la ligne d'horizon, situé en ligne verticale avec la perspective réelle ou imaginaire du Soleil.

55. Passons maintenant à la seconde hypothèse.

Un objet éclairé par une surface lumineuse reçoit des rayons de tous les points de cette surface (*). Alors, l'espace plus ou moins obscur situé au delà de l'objet se divise en deux parties : l'une, pour laquelle tous les rayons sont inter-

---

(*) Ici encore, nous négligeons une circonstance remarquable. La quantité de lumière émise par chaque point d'une surface lumineuse n'est pas la même dans toutes les directions, mais elle est proportionnelle au sinus de l'inclinaison des rayons sur l'élément de surface. Elle a donc, dans le cas d'une sphère, son *maximum* au centre du disque lumineux, et elle décroît vers la circonférence.

Cette loi étant rapprochée de la précédente, on conclut que la quantité de lumière émise par un élément de surface lumineuse, et reçue par un élément de surface opaque, est proportionnelle au produit des sinus des inclinaisons des rayons sur les deux éléments de surface.

Digitized by Google

ceptés, c'est l'ombre absolue ; l'autre, qui reçoit des rayons seulement d'une certaine portion de la surface lumineuse, est la *pénombre*.

Si l'objet n'est pas polyédrique, la ligne de séparation d'ombre et de lumière à sa surface ne sera pas nettement tranchée, et nous y distinguerons aussi une ombre et une pénombre.

Or, il est évident que tout plan tangent aux deux surfaces ne peut toucher l'objet qu'en un point de la ligne d'ombre, s'il est extérieur, et en un point de la ligne de pénombre, s'il est intérieur, c'est-à-dire si, en même temps qu'il touche les surfaces, il passe entre elles. Donc ces deux lignes sont formées par les contacts de tous les plans qui peuvent être conçus tangents aux deux surfaces, tant extérieurs qu'intérieurs.

Dans le cas le plus général, on obtiendrait tous ces plans tangents en les menant parallèlement aux directions successives d'une droite, mobile dans un plan autour de l'un de ses propres points, exceptant toutefois certaines positions de ce dernier plan pour lesquelles, comme on le verra, cette conception n'est plus possible. Considérés ainsi, ils se coupent consécutivement suivant des droites composant deux surfaces réglées, qui enveloppent la surface lumineuse et celle de l'objet extérieurement et intérieurement. On peut admettre à priori l'existence de telles surfaces réglées, et, dans ce cas, l'on comprend que le plan où nous avons conçu la droite mobile doit satisfaire à cette condition, de rencontrer toutes les arêtes de ces surfaces, ou de couper les surfaces suivant une courbe fermée. En effet, pour qu'il existe un plan tangent parallèle à une direction de la droite mobile, il faut et il suffit qu'on puisse mener, parallèlement à cette direction, une tangente à la courbe d'intersection, le plan tangent se trouvant déterminé par cette tangente et l'arête qui passe au point de contact ; or, cela n'est possible,

Digitized by Google

pour toutes les directions de la droite, qu'autant que la courbe est fermée.

Quant à l'ombre portée et à la pénombre, elles résulteront des intersections des surfaces réglées avec une surface donnée.

Dans le cas particulier où les surfaces éclairante et éclairée sont des sphères, les surfaces réglées se réduisent à des cônes qui ont leurs sommets sur la ligne des centres; les lignes d'ombre et de pénombre deviennent des cercles. Le Soleil et la Terre sont, d'une manière sensible, dans ces conditions. On sait que le premier de ces astres est de treize à quatorze cent mille fois aussi volumineux que le second, et compris néanmoins, par l'effet de sa distance, dans un angle visuel d'à peu près un demi-degré. Il en résulte que le sommet du cône extérieur est à une distance de la Terre qui égale 116 diamètres terrestres, distance au delà de laquelle il n'y a plus d'ombre proprement dite. Celui qui détermine la pénombre a son sommet entre les deux astres, et sa distance diffère peu de la précédente.

Une sphère incomparablement plus petite, placée sous nos yeux et recevant pareillement les rayons solaires, donnera naissance à deux cônes dont les sommets seront encore à la distance d'environ 116 fois son diamètre. Sur un plan qui coupera les cônes perpendiculairement à leur axe et à une distance peu considérable, les diamètres de l'ombre et de la pénombre sont un peu moindre et un peu plus grand que celui de la sphère; mais, par cela même, en négligeant la pénombre, il y a une sorte de compensation à remplacer les cônes par le cylindre dans lequel ils se confondraient si le Soleil était à l'infini; et c'est ce que l'on fait dans la pratique.

Des considérations analogues et la même conclusion s'appliquent au cas où les cônes sont coupés obliquement à

Digitized by Google

leur axe, la sphère pouvant d'ailleurs être remplacée par un corps de figure quelconque.

56. Nous avons supposé précédemment le corps lumineux et l'objet terminés par des surfaces courbes. Pour compléter ces aperçus théoriques, examinons les cas particuliers où cela n'a plus lieu.

Supposons l'objet réduit à une surface plane polygonale, le corps lumineux ayant une surface courbe. Nous concevrons, par les côtés du polygone, des plans s'appuyant extérieurement sur le corps lumineux; ils composeront une surface polyédrique dont l'intersection, par une surface quelconque, sera l'ombre portée sur cette surface. Ce serait la pénombre, si les plans étaient intérieurs et se croisaient avant de s'appuyer sur le corps lumineux.

Le cas d'un objet de forme polyédrique se ramène au précédent, en substituant au polygone le périmètre des faces éclairées du polyèdre.

La question ne se simplifie pas autant lorsque le corps lumineux est polygonal et l'objet en surface courbe, et nous la résoudrons par la méthode générale. Ainsi, supposant une droite mobile dans un plan d'une position convenable, nous concevrons, parallèlement à toutes ses directions successives, des plans tangents à la surface de l'objet et s'appuyant extérieurement sur le polygone, c'est-à-dire chacun d'eux sur le sommet qui le rend extérieur à la surface lumineuse. La surface réglée résultant des intersections consécutives de ces plans, déterminera la ligne d'ombre propre, par ses contacts avec la surface de l'objet, et la ligne d'ombre portée sur une surface donnée, par son intersection avec elle.

Des plans satisfaisant aux mêmes conditions, mais se croisant intermédiairement, donneront la pénombre.

Si l'on substituait au polygone une courbe plane,



Digitized by Google

les plans tangents devraient s'appuyer sur cette courbe.

Enfin, si les surfaces éclairante et éclairée sont polygonales, les plans tangents se réduisent à ceux qui passent par les côtés du polygone éclairé, et s'appuient sur les sommets du polygone éclairant, de manière à être, soit extérieurs, soit intérieurs.

57. Une fenêtre, ou toute ouverture qui donne à la lumière diffuse l'accès de nos habitations, est comparable à une surface lumineuse, puisque les rayons se comportent comme s'ils émanaient des points où ils ont traversé son plan. Le problème de la distribution des ombres dans l'intérieur d'une chambre où ne pénètre pas la lumière directe du soleil se rapporte en conséquence à nos dernières remarques. Toutefois, la lumière qui arrive des objets terrestres n'égale pas celle que réfléchit la voûte atmosphérique; la force des rayons varie beaucoup et irrégulièrement suivant leurs directions, et l'on ne peut plus attribuer aux ombres des intensités uniformes.

Si la lumière directe du soleil pénètre dans la chambre, et qu'on fasse abstraction de la lumière diffuse, le faisceau des rayons introduits dessine à la surface d'une muraille ou d'un objet quelconque, une figure comparable à une ombre portée, accompagnée aussi d'une pénombre, et susceptible d'être déterminée par les considérations précédentes. Cela revient à substituer les ombres à la lumière et la lumière aux ombres.

Dans la même hypothèse, supposons l'ouverture très-petite, de forme ovale allongée, dans un plan perpendiculaire aux rayons ou peu incliné, et concevons que le faisceau de rayons introduits vienne frapper un écran parallèle au même plan. Si l'écran est près de l'ouverture, la figure lumineuse qui se dessine à sa surface est allongée et de même forme que l'ovale; mais, à mesure qu'on l'éloigne,

Digitized by Google

cette figure s'élargit et devient sensiblement circulaire, en même temps que l'intensité de la lumière n'a plus que la valeur d'une pénombre. Cette particularité, que l'on mentionne quelquefois comme un phénomène curieux, trouve son explication très-simple dans ce qui précède. En effet, la lumière complète et la pénombre sur l'écran sont déterminées par deux surfaces réglées analogues à celles du n° 55; les arêtes de ces surfaces sont presque parallèles, en raison de la distance du soleil, et l'on conçoit en conséquence que, dans le premier cas, la section faite par l'écran a sensiblement la forme de l'ouverture : mais, si l'écran est reculé à une distance suffisante, il ne reçoit plus de lumière complète, et l'on ne doit plus considérer que celle des deux surfaces réglées qui donne la pénombre; or, ses arêtes divergent à peu près également autour de la droite que l'on conçoit allant du centre du soleil au centre de l'ouverture. La différence absolue entre la longueur et la largeur de l'image reste donc constante; d'où il suit que leur différence relative diminue, et que la courbe, en s'agrandissant, tend à devenir circulaire.

Un parallélogramme rectangle, substitué à l'ovale, donnerait une image quadrangulaire dont les côtés tendraient à devenir égaux et à former un carré; car la surface dont elle représenterait une section faite par l'écran est polyédrique (56), et comparable à une pyramide quadrangulaire dont les faces divergent également (*).

Par les mêmes raisons, plusieurs ouvertures très-petites et très-voisines produisent des images qui se confondent en une seule, sur une surface assez éloignée. On s'explique ainsi les figures arrondies ou peu allongées que prennent

(*) On répète d'après Lacaille, dans quelques traités de Physique, que l'image tend généralement à devenir circulaire, quelle que soit la forme de l'ouverture. La théorie, d'ailleurs fort élémentaire, qui vient d'être exposée, prouve qu'une telle conclusion va au delà de la vérité.



Digitized by Google

sur le sol les interstices des ombres portées par le feuillage des arbres, et quelques autres faits analogues; mais l'extrême affaiblissement de la lumière sur les petites portions de surfaces éclairées de la sorte ne permet jamais d'en assigner les limites avec précision.

## § II.

### DES IMAGES RÉFLÉCHIES ET DES REFLETS DE LUMIÈRE.

58. Les objets qu'éclaire un corps lumineux ne sont visibles que par les rayons qu'ils renvoient vers notre œil : aussi les phénomènes de réflexion sont-ils, pour ainsi dire, inséparables de ceux de verbération immédiate.

La loi de la réflexion de la lumière est fort connue; elle consiste en ce que le rayon incident et le rayon réfléchi, toujours situés dans un même plan normal à la surface de l'objet, sont également inclinés sur le plan tangent au point d'incidence ; on exprime cette seconde condition en disant que l'*angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence*.

Abstraction faite des corps diaphanes, tels que l'eau ou le verre, les rayons lumineux qui frappent la surface d'un objet sont, les uns absorbés, les autres réfléchis. La quantité de lumière réfléchie croît avec le poli ou la blancheur de la surface. L'absorption est presque nulle, ou la réflexion presque totale, avec les surfaces métalliques dont on fait des miroirs.

Si les rayons étaient réfléchis sans aucune altération dans leur nature, ou du moins dans celle des sensations qu'ils produisent, les objets auraient tous la couleur du corps lumineux ; nous ne pourrions les distinguer que par leurs reliefs, au moyen des oppositions d'ombres et de lumière : mais les diverses espèces de substances matérielles ont généralement la propriété de décomposer la lumière blanche, composée des sept couleurs de l'arc-en-ciel. Par

Digitized by Google

suite de cette décomposition, les rayons de certaines couleurs sont seuls réfléchis, et de leurs combinaisons résultent les nuances infiniment variées des corps. Toutefois, les miroirs doivent être exceptés : leurs surfaces n'ont pas de *couleurs locales;* ils réfléchissent indistinctement et sans décomposition les faisceaux de lumière blanche ou colorée. C'est en vertu de cette propriété qu'ils reproduisent les images des objets avec les couleurs qui leur sont propres.

59. La position de l'image, réfléchie par un miroir *plan,* se conclut de la loi fondamentale énoncée ci-dessus. Chacun de ses points est l'extrémité de la perpendiculaire abaissée sur le plan illimité du miroir, et prolongée d'une longueur égale : car l'effet est le même pour le spectateur, que si le faisceau des rayons visuels était parti directement du point ainsi déterminé. Nous pouvons nous en convaincre de cette manière : Soient (*fig.* 18) O l'œil du spectateur, MN le miroir, A un point quelconque d'un objet AB, enfin AGA′ une perpendiculaire à MN ou à son prolongement, telle que AG = A′G. Un rayon que l'on conçoit partant de A′, et dirigé vers un point de l'iris de l'œil, suivant A′I, rencontre MN en H. Or, parmi les rayons émanant du point A, celui qui tombe en ce point H prend, après sa réflexion, la même direction que le précédent, et pénètre dans l'œil comme s'il émanait du point A′ : cela résulte manifestement de l'égalité simultanée des angles AHG, NHI, A′HG. Il en est ainsi de tous les rayons dont se compose le faisceau partant du point fictif A′. Donc, les rayons envoyés effectivement par le point A, et réfléchis, pénètrent dans l'œil comme s'ils venaient du point A′, c'est-à-dire que le spectateur aperçoit en A′ l'image de A. Un second point B de l'objet a pareillement son image en B′, et ainsi des autres. Si l'objet se réduit à une ligne droite AB, son image est la droite A′B′.

Digitized by Google

La règle sur le lieu de l'image dans un miroir plan peut s'énoncer en ces termes : *L'objet et son image sont géométriquement symétriques par rapport au plan du miroir.* Il est bien entendu que ce plan est prolongé indéfiniment.

La distance de l'image à l'œil du spectateur résulte de la même construction : il est évident que A'O = A'H + HO = AH + HO. Donc, *la distance de l'image d'un point à l'œil du spectateur,* considéré lui-même comme un point, *est égale à la somme des rayons incident et réfléchi.* Cette somme est nécessairement plus grande que AO, c'est-à-dire que l'image est toujours plus éloignée que l'objet.

La première règle fournit en particulier ces conséquences :

L'image est toujours de même grandeur que l'objet;

Dans un miroir vertical, l'image d'un objet vertical est également verticale et debout ;

Dans un miroir incliné de 45 degrés, l'image d'un objet vertical est horizontale;

Dans un miroir horizontal, l'image du même objet est verticale, mais renversée.

Après avoir assigné le lieu et la grandeur de l'image, il importe de savoir si elle est visible pour le spectateur. Or, il est clair qu'elle est visible, lorsque les rayons qu'elle est censée envoyer vers l'œil du spectateur traversent la surface même du miroir, et non son prolongement idéal ; mais il faut encore qu'elle ne soit pas masquée par un objet quelconque ou son image. Ainsi, l'image d'un mât de vaisseau, dans sa position verticale, réfléchie par des eaux tranquilles, n'est jamais complétement visible; elle se dérobe, à sa base, derrière l'image du corps du navire. Quelquefois, au contraire, un objet n'est pas visible ou l'est seulement en partie, tandis que son image se montre tout entière.

On comprend, par les mêmes raisons, que le contour apparent d'une surface courbe peut différer beaucoup de

Digitized by Google

celui de son image; mais l'un et l'autre se déterminent d'après les mêmes règles (40).

60. Les remarques les plus essentielles pour les applications spéciales de ces principes à la perspective se réduisent aux suivantes :

L'image d'un objet ayant été déterminée géométriquement, de grandeur et de position, si elle doit être visible du point de vue, on la met en perspective comme un objet réel.

La perspective étant obtenue, les droites que l'on fait passer sur le tableau par les divers points de l'objet et ceux qui représentent leurs images, doivent concourir en un même point, car ces droites sont les perspectives d'autant de droites parallèles dans l'espace, c'est-à-dire de celles que l'on conçoit abaissées des points de l'objet sur le plan du miroir, et prolongées jusqu'à leurs images.

La grandeur perspective de l'image dépend essentiellement de sa position géométrique dans l'espace. Ordinairement elle est moindre que celle de l'objet : cependant elle peut l'égaler et même la surpasser, bien que dans l'espace elle soit toujours plus éloignée du point de vue que l'objet, comme nous l'avons établi. Le dernier cas pourrait arriver si le miroir prenait une inclinaison qui rendît l'image très-voisine du plan central, ou plus éloignée de l'axe de perspective, sans qu'elle cessât d'être visible du point de vue. Quand le miroir est horizontal, l'image a, sur le tableau, même hauteur verticale que l'objet.

61. Considérons maintenant les images produites par des réflexions successives, résultant d'une combinaison de plusieurs miroirs plans. L'image d'un objet, dans un de ces miroirs, est répétée par un second miroir; la nouvelle image l'est par un troisième ou par le premier, et ainsi de suite. Or, nous obtiendrons la position de la seconde image en traitant la première comme un objet dont la position

Digitized by Google

est déjà connue, et de même chacune des suivantes, au moyen de celle qui la précède. Ces images seront d'égale grandeur dans l'espace, et représenteront toutes le même objet, mais généralement sous des faces diverses. Leurs grandeurs perspectives dépendent de leurs positions.

Le cas le plus simple est celui où l'objet est placé entre deux miroirs parallèles. Dans ce système, les images sont en nombre infini, et rangées sur une même droite perpendiculaire aux miroirs. Nommons M et N les miroirs, $m$ et $n$ les distances de l'objet à leurs plans. Les images de première réflexion seront aux distances $m$ et $n$, derrière ces plans. La seconde de ces images est à la distance $m + 2n$ en avant du miroir M, d'où résultera une nouvelle image à cette même distance, derrière ce miroir. On trouve pareillement que celles de troisième réflexion, quatrième, etc., sont derrière le miroir M, aux distances $3m+2n$, $3m+4n$, $5m + 4n$, $5m + 6n$,..., qu'on obtient en ajoutant alternativement $2m$ et $2n$. Derrière le miroir N, les distances sont $3n + 2m$, $3n + 4n$,..., et ne diffèrent des précédentes que par la permutation de $m$ avec $n$. On peut dire encore que chacune de ces distances est égale à la somme des rayons successivement réfléchis jusqu'à la formation de l'image.

Si l'objet est également distant des deux miroirs, $m = n$, et la série se réduit à la progression arithmétique $m$, $3m$, $5m$, etc.

Un objet situé entre deux miroirs inclinés et faisant un angle aigu donne naissance à des images successives, mais dont le nombre n'est plus infini. Soient (*fig.* 19) A l'objet, MK et NK les deux miroirs. La première image A′, dans le premier miroir, donne la seconde image A″, celle-ci donne A‴, et A‴ donne A$^{iv}$, Mais A$^{iv}$, se trouvant en arrière du miroir MK ou de son prolongement, ne peut fournir une nouvelle image. De même l'image $A_1$, dans le second miroir, ne peut engendrer que les images successives $A_2$ et $A_3$. Encore faut-il ajouter que les dernières de ces

Digitized by Google

deux séries, $A^{IV}$ et $A_3$, ne sont pas aperçues par le spectateur, quand sa position est telle que les rayons visuels ne rencontrent pas en deçà du point K le miroir MK qui les a réfléchies : l'autre miroir s'interpose alors comme un corps opaque.

On voit donc que les réflexions successives s'arrêtent, parce qu'elles ne peuvent être produites que par les faces antérieures des miroirs ou leurs prolongements, et que les images viennent tôt ou tard se placer entre les faces postérieures. Cette position finale des images résulte d'ailleurs, de ce qu'après s'être éloignées graduellement des plans de réflexion, elles s'en rapprochent de même, dès que les perpendiculaires à ces plans passent au delà du point K. Le nombre des images successives est d'autant plus grand, que l'angle des miroirs est plus aigu; s'il est obtus, il ne peut y avoir que deux images, lesquelles se réduisent à une seule quand l'un des miroirs se rabat sur l'autre, ou que l'angle devient égal à deux angles droits.

Lorsque l'angle aigu des miroirs est une fraction aliquote de quatre angles droits, les images A′, A″,... se combinent avec $A_1$, $A_2$,..., et avec l'objet lui-même, pour composer un système symétrique, en forme de polygone étoilé. Le nombre des sommets du polygone est marqué par le dénominateur de la fraction, et ses côtés deviendraient tous égaux, si l'objet était également distant des deux miroirs. Tel est l'assemblage que représente la *fig.* 20, pour un angle de 30 degrés : l'image $A^{VI}$, la seule comprise entre les faces postérieures des miroirs, est à la fois l'image de $A^{V}$ dans l'un des miroirs et celle de $A_5$ dans l'autre; et pour cette raison elle reste visible, quelle que soit la position du spectateur en avant des miroirs. C'est là le principe du *kaléidoscope*.

Examinons plus particulièrement le cas de l'angle droit. Soient toujours (*fig.* 21) MK et NK les miroirs. Les deux

Digitized by Google

images I′ et $I_1$, de première réflexion, d'un point quelconque I, ne donnent qu'une seule et même image I″ de seconde réflexion, sur la direction IK : cette image I″, située en arrière des deux miroirs, ne saurait en fournir une nouvelle. La conclusion est la même à l'égard d'un objet AB, dont la forme et l'étendue sont arbitraires. Les images A′B′ et $A_1B_1$ s'accordent à donner la même image A″B″ de seconde réflexion.

Les rayons visuels dirigés de l'image A″B″ vers le spectateur traversent un seul des deux miroirs, ou bien, les uns traversent le premier et les autres le second. Supposons l'œil du spectateur en I, sur AB, son image seconde étant en I″. La partie I″A″ sera vue dans le premier miroir, I″B″ le sera dans le second, et l'image totale sera aussi droite que si elle était vue dans un seul miroir. Ces remarques se vérifient dans les chambres où se trouvent deux glaces juxtaposées à angle droit : un spectateur y voit son image de seconde réflexion toujours coupée en deux moitiés par l'angle des glaces, quelque position qu'il prenne ; et si ces deux moitiés ne composent pas exactement l'image complète, c'est que les glaces ne sont pas rectangulaires ou ne se joignent pas parfaitement.

62. Dans les miroirs à surfaces courbes, la position, la grandeur et la forme de l'image suivent des lois particulières. En général, les surfaces convexes diminuent et les surfaces concaves augmentent les dimensions des images dans le sens de leur courbure. Les ondes d'une eau agitée produisent des effets qui se rapportent au second de ces deux genres. Chaque onde est une surface convexe allongée, dans laquelle l'image d'un objet se peint irrégulièrement. Si toutefois l'objet est situé dans un plan perpendiculaire à la longueur de l'onde et passant par le point de vue, la déformation de son image est symétrique par rapport à ce plan, les dimensions sont très-réduites, mais seulement dans le

Digitized by Google

sens de la courbure. Il semble, en conséquence, que l'on devrait apercevoir, pour le même objet, autant de petites images distinctes qu'il y a d'ondes; mais l'apparence devient confuse par le mouvement de l'eau, et à peu près la même que si l'image, de grandeur naturelle, s'était brisée en une infinité de morceaux.

63. Un miroir de forme quelconque, qui ne recevrait de rayons que d'un seul corps lumineux, nous paraîtrait obscur dans presque toute son étendue; il n'y aurait de visibles que les points où les rayons réfléchis se trouveraient passer par notre œil. Mais aussi, les faisceaux de lumière renvoyés par ces points, n'éprouvant aucune dispersion, affecteraient fortement notre organe, et nous offriraient dans tout son éclat l'image du corps lumineux. Les surfaces qui ne peuvent reproduire les images et former des miroirs, mais qui ont cependant un certain degré de poli, placées en présence d'un corps lumineux, tendent plus ou moins à réaliser cette hypothèse. Les parties de leurs surfaces qui renvoient vers l'œil de nombreux faisceaux de rayons se nomment des *points brillants*, lorsqu'elles ont peu d'étendue; elles sont toujours relatives à la position du spectateur.

Une surface rugueuse et sans poli, se composant d'une infinité de facettes inclinées dans tous les sens, disperse les rayons en les renvoyant suivant une infinité de directions. Nous recevons en conséquence quelques rayons de chacun de ses points, et aucun d'eux ne nous procure une vive impression de lumière. Cependant il n'est pas de surface entièrement dépolie, de même qu'il n'en est aucune d'un poli parfait. On remarque effectivement que les corps, même de l'aspect le plus terne, réfléchissent un plus grand nombre de rayons suivant certaines directions qui se rapportent à la position de l'observateur, et produisent ainsi des *reflets* de lumière.

Digitized by Google

Il peut y avoir des points brillants dans les parties convexes et dans les parties concaves d'une surface, mais on les remarque plus ordinairement dans les premières. Leur détermination géométrique est facile, du moins en théorie. On conçoit un ellipsoïde de révolution ayant pour foyers le point de vue et le corps lumineux, et qui touche la surface par un contact extérieur si elle est convexe, intérieur si elle est concave : le point de contact est un point brillant. Dans le cas où le corps lumineux est à l'infini, comme le soleil, il faut remplacer l'ellipsoïde par un paraboloïde ayant pour foyer le point de vue et son axe dirigé parallèlement aux rayons solaires, parce que le paraboloïde est un ellipsoïde dont l'axe est infini.

Malheureusement cette règle, qui est une conséquence des propriétés de l'ellipse, ne peut être admise dans la pratique. Mais, à défaut de méthode rigoureuse, les conditions auxquelles doivent toujours satisfaire les rayons incident et réfléchi (59) suffisent pour diriger convenablement le praticien.

Les points brillants jouissent d'ailleurs d'une propriété remarquable. Si la surface est convexe, le rayon incident et le rayon réfléchi en chacun de ces points représentent le chemin le plus court pour se transporter du point lumineux au point de vue en allant toucher la surface, le point lumineux étant supposé à une distance finie. Si la surface est concave, la même chose ou l'inverse a lieu, selon que la surface est enveloppante ou enveloppée par rapport à l'ellipsoïde.

Quant aux simples reflets, leur étendue, toujours très-vague, ne saurait être linéairement circonscrite. Leur position est à peu près celle des points brillants qui auraient lieu si la surface était plus polie, mais ils ne peuvent être considérés que dans la perspective aérienne.

Digitized by Google

# EXERCICES THÉORIQUES.

Les problèmes ci-après sont présentés comme des exercices théoriques plus que pratiques : ils sont destinés à résumer les principes, à faire ressortir la corrélation qui s'établit entre les diverses parties du tableau et permet souvent d'en contrôler l'exactitude. Quelques-uns supposent les premières notions du calcul algébrique.

PROBLÈME.

64. *La hauteur d'un arbre est de* 21 *mètres, sa distance au plan central est de* 70 *mètres, et la distance centrale de* $3^m,4$. *Quelle sera sur le tableau la grandeur de cet arbre ?*

Le principe du n° 17 donne ici

$$70 : 3,4 :: 21 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 1,02.$$

Nous concluons que la grandeur perspective de l'arbre égale $1^m,02$.

PROBLÈME.

65. *Un homme d'une stature de* $1^m,75$ *n'a dans un tableau que* $0^m,136$ ; *la distance centrale est* $1^m,8$. *A quelle distance du plan central cet homme est-il supposé par le peintre ?*

En vertu du même principe, nous posons

$$0,136 : 1,75 :: 1,8 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 23,16.$$

La distance cherchée égale donc $23^m,16$, du moins à un centimètre près.

Digitized by Google

PROBLÈME.

66. *Un clocher, supposé par le peintre à une distance de* 90 *mètres du plan central, a dans un tableau une hauteur de* $0^m,98$ ; *la distance centrale est* 5 *mètres. Quelle est dans l'espace la hauteur de ce clocher?*

Nous posons pareillement

$$5 : 90 :: 0,98 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 17,64.$$

Ainsi, la hauteur demandée égale $17^m,64$, à moins de 0,01 près.

PROBLÈME.

67. *Une façade d'édifice perpendiculaire au tableau a, dans l'espace,* 30 *mètres de longueur; la hauteur perspective de cette façade, à ses deux extrémités, est de* $0^m,89$ *et* $0^m,72$. *Quelle est la distance de l'édifice au plan central?*

Lorsque deux droites parallèles au tableau sont d'égale longueur, leurs perspectives sont en raison inverse de leurs distances au plan central (19). Donc, si nous désignons par $z$ et $z'$ les distances des extrémités de la façade au plan central, nous aurons

$$89 : 72 :: z' : z,$$

$z'$ étant supposée la plus grande des deux distances. Mais $z'$ surpasse $z$ de la longueur de l'édifice, ou de 30 mètres; donc, en retranchant chaque conséquent de son antécédent,

$$17 : 72 :: 30 : z, \quad \text{d'où} \quad z = 127,05.$$

Ce résultat nous apprend donc que l'extrémité la plus rapprochée est à $127^m,05$ du plan central.

*Remarque.* Le calcul est indépendant de la distance centrale, laquelle reste arbitraire. On peut effectivement, con-

Digitized by Google

naissant $z$ et par suite $z'$, et attribuant à la distance centrale telle valeur que l'on voudra, calculer la hauteur de l'édifice; on la trouvera toujours la même aux deux extrémités.

Ou bien, l'on peut calculer la hauteur de l'édifice à la distance $z$, et en conclure la valeur de $z'$ d'après la valeur de la plus petite des deux perspectives; on trouvera que $z'$ surpasse $z$ de 30 mètres.

La proportion fondamentale du n° 17 contient quatre lignes, dont deux sont parallèles au tableau et deux perpendiculaires, celles-ci partant du plan central. Toute transformation qui a pour résultat de remplacer l'une de ces dernières lignes par une autre qui ne part plus du plan central, fait disparaître en même temps la distance centrale. Cette distance reste toujours indéterminée, lorsque l'on ne donne dans l'espace aucune grandeur parallèle au tableau, comme dans le cas où toutes les données sont parallèles à ce plan.

PROBLÈME.

68. *Une façade d'édifice perpendiculaire au tableau a* 25 *mètres de longueur sur* 18 *de hauteur. Sur le tableau, la hauteur de cette façade, à ses deux extrémités, est* $1^m,08$ *et* $0^m,75$. *Calculer la distance de l'édifice au plan central et la distance centrale.*

Par un calcul semblable au précédent, on trouvera d'abord que l'extrémité la plus rapprochée est à $56^m,81$ du plan central. Pour obtenir ensuite la distance centrale, nous posons

$$18 : 1,08 :: 56,81 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 3,408.$$

La distance centrale est donc de $3^m,408$.

Digitized by Google

PROBLÈME.

69. *Une façade d'édifice est perpendiculaire au tableau; les extrémités et une verticale menée par son centre, trois lignes égales dans l'espace, ont des grandeurs perspectives de* $1^m,36$, $1^m,05$ *et* $0^m,80$. *On demande si cette représentation est exacte.*

Non. En effet, soient $z$, $z'$, $z''$ les distances des trois verticales au plan central, $z''$ étant la plus grande et $z$ la plus petite. Nous devrions avoir les proportions

$$105 : 80 :: z'' : z',$$
$$105 : 136 :: z : z',$$

d'où, par la soustraction des conséquents de leurs antécédents,

$$25 : 80 :: z'' - z' : z',$$
$$31 : 136 :: z' - z : z';$$

mais on suppose $z'' - z'$ égal à $z' - z$. Donc, il faudrait que les premiers rapports de ces proportions fussent égaux, ce qui n'est pas.

*Remarque.* Pour toute question analogue, soient $h$, $h'$, $h''$ les trois verticales figurées dans le tableau; on trouvera, par l'Algèbre, qu'elles doivent satisfaire à cette condition :

$$h' = \frac{2hh''}{h + h''}.$$

Ce problème nous offre un des cas où l'on peut vérifier une représentation perspective avec les seules lignes tracées sur la toile.

PROBLÈME.

70. *Deux colonnes placées sur une ligne perpendiculaire au tableau, hautes, dans l'espace, de* 25 *et* 18 *mètres, ont en perspective des longueurs de* $1^m,26$ *et* $0^m,58$.

Digitized by Google

*La première est la plus rapprochée : la distance qui les sépare est de* 10 *mètres. Calculer leurs distances au plan central.*

Nous calculerons d'abord la longueur qu'aurait, sur le tableau, la seconde colonne, si dans l'espace elle était égale à la première. A cet effet, nous poserons

$$25 : 18 :: 1,26 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 0,907.$$

Cette longueur étant obtenue, il est clair que le calcul se trouve ramené au problème du n° 68; et l'on trouve que la colonne la plus rapprochée est à $25^m,69$ du plan central. Par suite, la distance centrale est $1^m,294$.

PROBLÈME.

71. *Dans un tableau, un homme, dont la stature est présumée de* $1^m,68$, *n'a qu'une grandeur de* $0^m,084$, *et ses pieds sont à* $0^m,12$ *au-dessous de la ligne d'horizon. Quel est, dans l'espace, l'abaissement du terrain sur lequel il est placé au-dessous du plan d'horizon?*

Soient G et $g$ la grandeur de cet homme dans l'espace et sur le tableau, $h$ la distance de ses pieds à la ligne d'horizon du tableau, et H l'abaissement demandé : nous aurons (19) la proportion

$$g : G :: h : H,$$

qu'on trouve d'ailleurs évidente, en considérant H comme une verticale élevée du terrain jusqu'au plan d'horizon, et $h$ comme sa perspective. On en tire $H = 2^m,4$ pour la solution du problème. Il est inutile d'observer que nous négligeons la courbure de la Terre.

PROBLÈME.

72. *Deux hommes, d'une stature présumée de* $1^m,7$, *ont dans un tableau des hauteurs de* $0^m,165$ *et* $0^m,4$. *La*



Digitized by Google

*distance de leurs pieds à la ligne d'horizon est* $0^m,54$ *pour le premier, et* $0^m,82$ *pour le second. Quelle est la différence de niveau des terrains sur lesquels ils sont supposés par le peintre?*

On trouvera, comme dans l'exemple précédent, que le terrain du premier est à $5^m,564$, et celui du second à $3^m,485$ au-dessous du plan d'horizon. La différence de niveau égale en conséquence $2^m,079$.

*Remarque.* Par la propriété des points de concours, on sait reconnaître si les personnages d'un tableau sont de niveau dans l'espace (16) : ici, nous déterminons en outre les différences de niveau, d'ailleurs avec les seules indications fournies par le tableau.

Dans ce problème et le précédent, toutes les grandeurs données étant parallèles au tableau, on ne pourrait s'en servir pour calculer la distance centrale, ou toute autre grandeur perpendiculaire à ce plan.

PROBLÈME.

73. *Dans un tableau d'intérieur sont représentés les carreaux d'un parquet, rangés suivant des lignes parallèles au plan central; en les comparant avec des objets connus, on estime qu'ils ont* $0^m,3$ *de côté dans l'espace; les côtés situés sur la ligne la plus rapprochée et sur la plus éloignée, ont sur le tableau* $0^m,048$ *et* $0^m,030$; *il y a vingt rangées; d'où il suit que la largeur du parquet, perpendiculairement au tableau, égale* 6 *mètres dans l'espace; cette largeur, sur le tableau, est de* $0^m,18$. *Quels doivent être la distance du parquet au plan central, son abaissement au-dessous du plan d'horizon, et la distance centrale?*

D'abord nous obtiendrons la distance du parquet au plan central, comme celle de l'édifice du n° 67. Ainsi, appe-

Digitized by Google

lant $z$ et $z'$ les distances des deux rangées extrêmes au plan central, nous aurons

$$0,048 : 0,030 :: z' : z;$$

d'où, en retranchant les conséquents des antécédents, et observant que $z' - z = 6$, nous tirons $z = 10$; par suite, $z' = 16$. Connaissant $z$, nous calculerons la distance centrale $\delta$ en posant

$$0,3 : 0,048 :: 10 : \delta;$$

ce qui donne $\delta = 1,6$.

Maintenant, pour déterminer l'abaissement H au-dessous du plan d'horizon, nous commencerons par calculer la distance de l'une des rangées à la ligne d'horizon sur le tableau, et la question se trouvera ramenée à celle du n° 72. Or, soient $h$ et $h'$ les distances des deux rangées extrêmes à la ligne d'horizon, nous aurons

$$0,030 : 0,048 :: h' : h,$$

d'où, en soustrayant les conséquents, et remarquant que $h - h' = 0,18$, nous tirons

$$h = 0,48.$$

De là nous concluons, pour avoir H,

$$0,048 : 0,3 :: 0,48 : \mathrm{H},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{H} = 3.$$

Ainsi, en résumé, la rangée la plus voisine est à 10 mètres du plan central; la distance centrale est $1^{m},6$, et le point de vue est élevé de 3 mètres au-dessus du plan du parquet.

Ces éléments, une fois connus, pourraient servir eux-mêmes à calculer ou vérifier une infinité d'autres détails de la perspective.

*Remarque.* Si l'on n'avait besoin que de la seule quantité H, on pourrait l'obtenir directement, surtout en com-



Digitized by Google

mençant par calculer son expression algébrique en fonction des autres quantités. Soient G le côté d'un carreau dans l'espace, $g$ et $g'$ ses valeurs perspectives sur les rangées extrêmes, $a$ la largeur du parquet en perspective ; on trouverait

$$H = \frac{aG}{g - g'}.$$

Du reste, on faciliterait l'intelligence des raisonnements ci-dessus en représentant toutes les quantités par des lettres, comme nous le ferons plus loin pour quelques autres exercices.

PROBLÈME.

74. *Un mât de navire, situé dans l'espace sur la ligne d'horizon visuel, d'une hauteur présumée de* 50 *mètres au-dessus de l'eau, n'a dans un tableau que* $0^m,015$ *de hauteur. Déterminer le rayon d'horizon visuel et l'élévation du point de vue, la distance centrale étant de* 6 *mètres.*

Le rayon d'horizon visuel, ou la distance du navire au plan central, se déterminera par la proportion (17)

$$0,015 : 50 :: 6 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 20000.$$

La table du n° 27 nous apprend ensuite que ce rayon d'horizon visuel correspond à une hauteur du point de vue comprise entre 26 et 27 mètres. Nous obtiendrions une valeur plus approchée par la méthode d'interpolation usitée dans le calcul logarithmique.

On comprend que cette solution suppose invariable la grandeur apparente des objets élevés par la réfraction.

PROBLÈME.

75. *Une colonne, qui s'élève du sein de la mer jusqu'à la hauteur de* 54 *mètres, a dans un tableau une hauteur de* $0^m,036$, *et sa perspective est coupée par la ligne d'horizon à* $0^m,012$ *au-dessus de sa base; la distance centrale est de*

Digitized by Google

5 *mètres. Déterminer la distance de cette colonne au plan central et l'élévation du point de vue, en ayant égard à la courbure de la Terre.*

La distance de la colonne s'obtient par la proportion

$$0,036 : 54 :: 5 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 7500.$$

Comme 12 est le tiers de 36, la partie de la colonne située au-dessous du plan d'horizon égale 18 mètres, tiers de 54, en négligeant la réfraction; d'où il suit que, si l'on supposait la Terre plane, l'élévation du point de vue serait de 18 mètres. Mais si l'on tient compte de la courbure, cette valeur est trop forte, et doit être diminuée de la hauteur du point de vue qui correspond à un rayon d'horizon visuel égal à 7500 mètres, c'est-à-dire à peu près de 4 mètres, d'après la table du n° 27. L'élévation du point de vue est donc d'environ 14 mètres.

Pour l'intelligence de la dernière partie de l'opération, on peut concevoir le niveau de la mer élevé jusqu'au point de vue. Dans cette hypothèse, la partie de la colonne comprise entre la mer et le plan d'horizon perspectif est la quantité dont il faut diminuer les 18 mètres; or, elle est assimilable à un objet dont l'extrémité se montre à l'horizon d'un spectateur placé au niveau de la mer (28); et comme ici sa distance est connue, la table donne sa hauteur.

C'est ainsi qu'on détermine, dans les opérations géodésiques, la différence entre le *niveau apparent* et le *niveau vrai* de deux points de station, avec des tables qui supposent leur distance donnée.

PROBLÈME.

76. *Une longueur horizontale de* 18 *mètres est située dans le plan normal, à* 28 *mètres au-dessous du plan de l'horizon et à* 80 *mètres du plan central; la distance centrale est de* $4^m,5$. *Quelle doit être sa grandeur perspective?*

Digitized by Google

La formule du n° 23, savoir,

$$ab = AB \times \frac{OR \times RV}{AR \times BR},$$

dans laquelle OR désigne ici la longueur de 18 mètres, RV la distance centrale, AR et BR les distances des extrémités de la droite au plan central, 80 mètres et 98 mètres, donne pour la valeur cherchée:

$$ab = 18 \times \frac{28 \times 4,5}{80 \times 98}.$$

On simplifie par la suppression des facteurs communs, et l'on trouve $ab = 0^m,2893$. On pourrait encore calculer les distances des deux points $a$ et $b$ à la ligne d'horizon, et prendre leurs différences; or, chacune de ces distances est la perspective d'une verticale de 28 mètres considérée successivement aux points A et B, ce qui donnerait $1^m,5750$ et $1^m,2857$, dont la différence est $0^m,2893$.

PROBLÈME.

77. *La largeur d'un fleuve qui coule parallèlement au plan central est de* 100 *mètres dans l'espace et* $1^m,24$ *sur le tableau; le bord le plus rapproché est à* 75 *mètres du plan central, et la distance centrale* 6 *mètres. Calculer la hauteur du point de vue au-dessus du fleuve.*

Dans la formule ci-dessus, OR est la quantité à déterminer. En y substituant aux autres quantités leurs valeurs, nous avons

$$1,24 = 100 \times \frac{OR \times 6}{75 \times 175},$$

d'où nous tirons, par une opération facile d'Algèbre,

$$OR = 27^m,125.$$

Telle est donc l'élévation du point de vue au-dessus de la surface du fleuve, considérée comme horizontale.

Digitized by Google

PROBLÈME.

78. *Une rivière parallèle au tableau a une largeur perspective de* $0^m,175$; *le bord le plus rapproché est à* 24 *mètres du plan central; la hauteur du point de vue au-dessus de sa surface égale* 5 *mètres, et la distance centrale* 3 *mètres. Quelle est, dans l'espace, la largeur de la rivière?*

Ici deux quantités de la même formule sont inconnues, savoir, AB et AR; mais la seconde peut être remplacée par AR + AB, ce qui donne

$$ab = \mathrm{AB} + \frac{\mathrm{OR} \times \mathrm{RV}}{\mathrm{AR}\ (\mathrm{AR} + \mathrm{AB})},$$

où il n'y a plus que l'inconnue AB qui est la quantité demandée. En substituant les valeurs numériques et résolvant, on trouve $9^m,33$ pour cette quantité, ou la largeur de la rivière.

On parviendrait au même résultat de cette autre manière. Soient $h$ et $h'$ les distances, sur le tableau, des deux bords du fleuve à la ligne d'horizon : elles représentent la perspective d'une verticale de 5 mètres, placée successivement sur les deux bords dans l'espace. Nous aurons donc la première par la proportion

$$24 : 3 :: 5 : h, \quad \text{d'où} \quad h = 0,625;$$

par suite,

$$h' = 0,625 - 0,175 = 0,450.$$

Nous en concluons la distance $z'$ du bord le plus éloigné au plan central par cette nouvelle proportion :

$$0,450 : 5 :: 3 : z', \quad \text{d'où} \quad z' = 33,33.$$

La largeur du fleuve, ou la différence des distances de ses bords, sera donc

$$33^m,33 - 24^m \quad \text{ou} \quad 9^m,33.$$

Digitized by Google

PROBLÈME. (*Fig.* 22.)

79. *Un tableau qui représente une vue maritime a* 5 *mètres de largeur; la distance centrale est aussi de* 5 *mètres; le point de vue correspond au centre de la toile, et son élévation au-dessus du niveau de la mer égale* 100 *mètres. On demande si la ligne d'horizon visuel doit avoir dans ce tableau une courbure appréciable.*

Soient AMB l'arc d'horizon visuel qu'embrasse le champ de la perspective; AGB sa corde; O son centre : ce point est aussi le pied de la verticale abaissée du point de vue sur le plan du cercle. Les deux moitiés AM et MB de l'arc AMB étant symétriques et leur courbure en perspective devant être la même, il suffit de considérer la première, et la question peut se réduire à évaluer l'abaissement au-dessous de la ligne d'horizon perspectif de chacun des deux points A et M, dans le tableau.

Cet abaissement est égal à la grandeur perspective d'une verticale de 100 mètres, placée successivement en A et en M, et nous pourrons le calculer dès que nous connaîtrons les distances de ces points au plan central. Or, la première de ces distances est OM, ou le rayon d'horizon visuel : la table du n° 27 nous apprend que pour une hauteur de 100 mètres, elle est d'environ 38 933 mètres. La seconde distance est égale à OG. Pour obtenir la valeur de cette droite, nous observerons que OG et GA sont entre elles comme la distance centrale et la demi-largeur du tableau, c'est-à-dire comme 2 : 1, d'après les conditions de l'énoncé : car, si G′ et A′ représentent les pieds des verticales abaissées du centre et de l'un des bords de la toile, OG′ et A′G′ sont évidemment égales à la distance centrale et à la demi-largeur du tableau, et ces lignes sont proportionnelles à OG et AG. Il nous est donc facile de déterminer OG, soit par la considération du triangle rectangle AGO, dans lequel

Digitized by Google

nous connaissons le rapport des côtés de l'angle droit, soit par la construction graphique d'un triangle semblable et l'usage d'une échelle de proportions. Pour plus de simplicité, nous supposons d'abord le rayon égal à l'unité, et nous trouvons, dans cette hypothèse, OG = 0,894427 : multipliant ensuite par 38933, nous obtenons pour sa valeur métrique 34 823 mètres.

Connaissant les distances au plan central, nous trouvons que l'abaissement du point M au-dessous de la ligne d'horizon perspectif égale $0^m$,0128, et celui du point A, $0^m$,0143. La différence 0,0015 ne saurait être appréciée du point de vue. Ainsi, la courbure de la ligne d'horizon visuel est négligeable, et l'on peut représenter cette ligne par une droite, malgré la grande étendue attribuée dans ce problème au champ perspectif.

PROBLÈME.

80. *Le soleil étant dans le plan normal, à la hauteur angulaire de* 20 *degrés, et la distance centrale* 3 *mètres, trouver sur le tableau la position de cet astre et celle de son image dans une nappe d'eau.*

Les rayons solaires qui parviennent au point de vue, soit directement, soit après leur réflexion, seront inclinés de 20 degrés sur le plan d'horizon : et comme dans un triangle rectangle où l'un des angles est de 20 degrés, le rapport du côté opposé au côté adjacent est à peu près égal à 0,364, ces rayons rencontreront le tableau en des points dont la distance à la ligne d'horizon sera à la distance centrale comme 0,364 est à 1. On trouve, en conséquence, que les deux points demandés sont situés sur la ligne normale, à $0^m$,1092 au-dessus et au-dessous de la ligne d'horizon.

On voit que la position de l'image du soleil, réfléchie par la nappe d'eau, est indépendante de la hauteur de cette surface, parce que, le soleil étant supposé à une distance

Digitized by Google

infinie, la direction de ses rayons incidents ou réfléchis reste la même, quelle que soit cette hauteur. Le problème se réduit ainsi à la détermination de deux points accidentels.

PROBLÈME.

81. *Le soleil étant dans le plan central, un objet vertical et son ombre ont des longueurs perspectives de* 5 *et de* 8 *décimètres; quelle est la hauteur angulaire du soleil?*

L'objet et son ombre, étant parallèles au plan central, ont sur le tableau le même rapport de grandeur que dans l'espace. Mais si l'on construit un triangle rectangle dont les côtés soient entre eux comme 5 est à 8, on trouve que l'angle opposé au premier est d'environ 32 degrés. Telle est donc la valeur de la hauteur angulaire demandée.

PROBLÈME.

82. *Le soleil étant dans le plan normal, au delà du tableau, un objet vertical a* 9 *mètres de hauteur dans l'espace : sur le tableau, cette hauteur est de* $0^m,54$ *et l'ombre qu'elle projette sur le sol, de* $0^m,12$ : *le plan de cette ombre dans l'espace est à* 25 *mètres au-dessous du point de vue; la distance centrale est de* 6 *mètres. Quelle est la hauteur angulaire du soleil?*

Le problème se réduirait au précédent si nous connaissions la longueur de l'ombre dans l'espace. Pour avoir cette longueur, nous commençons par déterminer la distance $z$ de l'objet au plan central, par la proportion

$$0,54 : 9 :: 6 : z,$$

et trouvons cette distance de 100 mètres. Nous appliquons ensuite la formule du n° 23, où l'inconnue est ici AB, en remarquant que BR, qui est pareillement inconnu, peut

Digitized by Google

être remplacé par AR — AB; cela donne

$$0,12 = AB\frac{25 \times 6}{100(100 - AB)}.$$

On en tire $AB = 7^m,41$ pour la longueur de l'ombre dans l'espace. Enfin, par la construction d'un triangle rectangle dont les côtés soient entre eux comme 9 est à 7,41, nous trouvons que l'angle opposé au premier est d'environ 50°,5. C'est la solution du problème.

La longueur de l'ombre dans l'espace peut encore se déterminer ainsi : soient, sur le tableau, $h$ et $h'$ les distances des deux extrémités de l'ombre à la ligne d'horizon, et, dans l'espace, $z$ et $z'$ les distances des mêmes points au plan central. $z - z'$ est la quantité cherchée, et comme déjà nous connaissons $z$, il ne reste qu'à obtenir $z'$. Or, de la valeur de $z$ nous pouvons conclure $h$, par suite $h'$ et finalement $z'$. Nous avons en effet

$$100 : 6 :: 25 : h, \quad \text{d'où} \quad h = 1,5;$$

donc

$$h' = h + 0,12 = 1,67.$$

Ensuite,

$$1,67 : 25 :: 6 : z', \quad \text{d'où} \quad z' = 92,59;$$

donc, enfin,

$$z - z' = 100 - 92,59 = 7^m,41,$$

comme précédemment.

PROBLÈME. (*Fig.* 23.)

83. *On donne deux horizontales* AB, CD, *se coupant à angles droits par les milieux de leurs longueurs, qu'on suppose égales, la première étant située dans le plan normal : la distance du point* I *au plan central est connue. A quelle hauteur le point de vue doit-il s'élever pour que les perspectives de ces droites soient égales?*

Digitized by Google

Pour éviter les périphrases, appelons

Z la distance du point I au plan central;

$\delta$ la distance centrale;

H la hauteur du point de vue au-dessus du plan des droites;

*ab*, *cd* leurs perspectives;

AR, BR les distances des points A et B au plan central, parce que R désignera, comme au n° 22, le point où la direction AB rencontre ce plan.

Nous aurons (17 et 23)

$$cd = \frac{CD \times \delta}{Z}, \quad ab = \frac{AB \times \delta \times H}{AR \times BR}.$$

Or, pour l'égalité de ces valeurs, puisque AB = CD, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{1}{Z} = \frac{H}{AR \times BR}.$$

Soit RM une tangente menée du point R à la circonférence décrite sur les droites, comme diamètres. En vertu d'un principe de géométrie, nous aurons

$$AR \times BR = \overline{RM}^2,$$

et la condition précédente devient

$$\frac{1}{Z} = \frac{H}{\overline{RM}^2},$$

ou, sous une autre forme,

$$Z : RM :: RM : H.$$

Soient menés le rayon IM et la perpendiculaire MK sur IR. D'après une propriété du triangle rectangle, KR est aussi une troisième proportionnelle aux lignes Z et RM, c'est-à-dire qu'on a

$$IR \quad \text{ou} \quad Z : RM :: RM : KR.$$

Digitized by Google

Donc, H = KR. Ainsi, le point de vue doit s'élever à une hauteur égale à la distance du point K au plan central.

*Remarque.* Les deux parties *bi*, *ia* de *ba* ne peuvent être égales (24), et les conditions du problème ne sont pas celles où le cercle décrit sur les droites a pour perspective un cercle : ce sera une ellipse allongée dans le sens horizontal, et le point K correspondra au centre de cette courbe (35). Nous pouvons donc énoncer en ces termes la solution du problème : *Pour que les perspectives des droites soient égales, la hauteur du point de vue au-dessus de leur plan doit égaler la distance du plan central au point dont la perspective est le centre de l'ellipse qui représente le cercle décrit sur ces droites.*

PROBLÈME. (*Fig.* 24.)

84. *Étant donné un cercle horizontal dont le centre* I *est dans le plan normal, à quelle hauteur le point de vue doit-il s'élever pour que la perspective soit pareillement un cercle ?*

Soient R le point où le diamètre AB perpendiculaire au plan central rencontre ce plan ;

RC, RD des tangentes, déterminant la ligne des points de contact CKD ;

H la hauteur du point de vue au-dessus du plan du cercle ;

$\delta$ la distance centrale.

Les droites AB, CD correspondent aux axes principaux de l'ellipse (35), et il s'agit de trouver la condition de l'égalité de ces axes ; à cet effet, nous avons pour leurs perspectives

$$cd = \frac{CD \times \delta}{KR}, \qquad ab = \frac{AB \times \delta \times H}{AR \times BR}.$$

Digitized by Google

Ces valeurs sont égales, si l'on a

$$\frac{CD}{KR} = \frac{AB \times H}{AR \times BR};$$

ou, ce qui revient au même, en observant que

$$CD = 2CK, \quad AB = 2AI, \quad \text{et} \quad AR \times BR = \overline{RC}^2,$$

$$\frac{CK}{KR} = \frac{AI \times H}{\overline{RC}^2};$$

mais les triangles semblables CKR, CIR donnent

$$CK : KR :: CI : RC; \quad \text{d'où} \quad \frac{CK}{KR} = \frac{CI}{RC}.$$

Substituant cette valeur, nous obtenons

$$\frac{CI}{RC} = \frac{AI \times H}{\overline{RC}^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad H = RC.$$

Donc, *la hauteur du point de vue, au-dessus du plan du cercle, doit égaler la tangente menée du point où le diamètre perpendiculaire au plan central rencontre ce plan.*

Il serait plus général de dire, au lieu de la hauteur du point de vue, *sa distance au plan du cercle,* parce qu'il peut être indifféremment supposé au-dessus et au-dessous de ce plan.

*Première remarque.* Cette condition s'accorde avec celle du n° 33. En effet (*fig.* 10), si l'on a OR égal à la tangente menée du point R, c'est-à-dire

$$AR : OR :: OR : BR,$$

il en résulte que les deux triangles OAR, OBR sont semblables; donc, l'angle B égale l'angle AOR, lequel est lui-même égal à GDO.

*Seconde remarque.* Un cercle, dont le plan serait parallèle au plan normal et le centre dans le plan d'horizon,

Digitized by Google

peut être substitué à celui du problème, car il y a parité de position à l'égard du point de vue. Donc, la perspective d'un tel cercle sera circulaire si la distance du point de vue au plan du cercle égale encore la tangente menée du point où le diamètre perpendiculaire au plan central rencontre ce dernier plan.

On donnerait enfin à la solution du problème toute sa généralité, en considérant qu'un cercle, supposé d'abord dans l'une ou l'autre de ses positions, ne cessera pas d'avoir sa perspective circulaire, s'il tourne d'un mouvement de révolution autour de l'axe de perspective. Une observation analogue s'applique au problème précédent et aux trois suivants.

PROBLÈME. (*Fig.* 25.)

85. *Étant donné un triangle équilatéral* BAC, *dont la hauteur* AM *est dans le plan normal et dont le plan est horizontal, trouver à quelle hauteur doit s'élever le point de vue, pour que la perspective soit aussi un triangle équilatéral.*

Soient R le point où la direction AM rencontre le plan central;

$\delta$ la distance centrale;

H l'élévation du point de vue au-dessus du plan du triangle. Nous aurons, en désignant par *abc* et *am* les perspectives de ABC et de AM :

$$bc = \frac{BC \times \delta}{MR}, \quad am = \frac{AM \times \delta \times H}{AR \times MR}.$$

Or, le triangle *abc*, qui est au moins isocèle, et dont *am* représente la hauteur, devient équilatéral si $am = \frac{1}{2} bc \sqrt{3}$. Nous posons, en conséquence,

$$\frac{AM \times \delta \times H}{AR \times MR} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{BC \times \delta}{MR}.$$

Digitized by Google

Observant que $AM = \frac{1}{2} BC \sqrt{3}$, et supprimant les facteurs communs, nous en concluons

$$\frac{H}{AR} = 1, \quad \text{ou} \quad H = AR.$$

Ainsi, *la hauteur du point de vue doit égaler la distance du point A au plan central.*

On arrive à la même conclusion de cette autre manière : Supposons d'abord que le plan du tableau passe par le côté BC; dans ce cas, la perspective ne peut avoir ses trois côtés égaux qu'autant qu'elle est elle-même un triangle égal à BAC, puisque BC est un côté commun aux deux triangles; mais alors il est évident que le rayon visuel qui passe par les deux sommets est incliné de 45 degrés sur le plan horizontal, et que l'élévation du point de vue est égale à AR. Maintenant, si le tableau se déplace parallèlement à BC, l'élévation du point de vue étant invariable, la perspective variera de grandeur, mais en restant géométriquement semblable à elle-même : elle formera donc encore un triangle équilatéral.

*Première remarque.* La solution du problème est indépendante de la grandeur du triangle, comme il était facile de le prévoir; car, dès que la perspective est un triangle équilatéral, elle conserve cette propriété quand on prolonge les deux côtés d'une longueur égale, d'ailleurs arbitraire.

Elle convient indifféremment au triangle BAC et à son opposé B'AC', formé par les prolongements des côtés.

*Seconde remarque.* Le triangle équilatéral est le seul polygone régulier qui puisse donner pour sa perspective un polygone semblable sans être parallèle au tableau, c'est-à-dire le seul dont la pyramide perspective offre un cas analogue à celui de la section antiparallèle du cône oblique.

Digitized by Google

En effet, si un polygone régulier d'un plus grand nombre de côtés était supposé dans le même cas, les diagonales du polygone et celles de sa perspective se correspondant, il faudrait que les parties égales des premières, déterminées par leurs intersections, fussent aussi égales en perspective, ce qui est impossible (24).

Dans le cas où la perspective d'un cercle est circulaire, s'il n'est pas parallèle au tableau, on aurait tort de croire que le triangle équilatéral inscrit ou circonscrit à sa circonférence peut être équilatéral en perspective; il devient irrégulier parce que les arcs interceptés sur la circonférence, égaux dans l'espace, sont nécessairement inégaux sur le tableau.

PROBLÈME. (*Fig.* 26.)

86. *Étant donné un trapèze* ABCD *symétrique et horizontal, dont l'axe de symétrie* MN *est dans le plan normal, trouver les conditions pour que sa perspective soit un carré.*

Pour satisfaire au problème, comme les perspectives des bases sont horizontales, celles des deux côtés devront être verticales, ce qui exige que les directions DA, CB se rencontrent en un point R du plan central (12).

Cette condition remplie, il faut encore que la perspective de AB soit égale à celle de MN. Or, en nous servant toujours des mêmes notations, nous avons :

$$ab = \frac{AB \times \delta}{MR}, \quad mn = \frac{MN \times \delta \times H}{MR \times NR}.$$

Les deux perspectives seront donc égales si

$$\frac{AB \times \delta}{MR} = \frac{MN \times \delta \times H}{MR \times NR},$$

égalité qui se réduit à la proportion

$$MN : AB :: NR : H.$$



Digitized by Google

Telle est la seconde condition du problème : elle signifie que *l'élévation du point de vue doit être une quatrième proportionnelle à la hauteur du trapèze, sa petite base et la distance de sa grande base au plan central.*

On arriverait aux mêmes conséquences, en considérant le trapèze comme la perspective d'un carré, et permutant entre eux le plan central et le plan d'horizon. On voit en particulier que les droites DA, CB, devenant les perspectives de deux droites parallèles, devraient concourir en un point R de la nouvelle ligne d'horizon, ce qui rentre dans la première condition ci-dessus.

PROBLÈME. (*Fig.* 27.)

87. *Étant donné, dans la même position que le précédent, un trapèze symétrique* ABCD, *trouver les conditions pour que sa perspective soit un autre trapèze semblable.*

Nous commencerons par observer qu'il deviendrait impossible de satisfaire au problème si la base AB, la plus rapprochée du plan central, était plus grande que CD, comme le suppose la *fig.* 28; car, AB et CD diminuant en perspective proportionnellement à leurs distances au plan central, la seconde de ces lignes sera toujours diminuée dans un plus grand rapport que l'autre. Nous devons donc admettre l'hypothèse de la *fig.* 27; mais alors la perspective *abcd* ne pourra être semblable à ABCD, qu'autant que *ab* sera sa plus grande base, de manière que le trapèze proposé paraisse renversé dans sa perspective. Les côtés *ab* et *cd* seront ainsi les homologues de CD et de AB.

Cela posé, puisque le trapèze *abcd* est nécessairement symétrique, il suffit, pour la similitude demandée, que le rapport de *mn* à *ab* égale le rapport de MN à CD, et que, d'une autre part, le rapport de *ab* à *cd* soit celui de CD

Digitized by Google

à AB; or, nous avons

$$mn = \frac{MN \times \delta \times H}{MR \times NR}, \quad ab = \frac{AB \times \delta}{MR}, \quad cd = \frac{CD \times \delta}{NR}.$$

Les valeurs de *mn* et *ab*, divisées l'une par l'autre, donnent, après la suppression des facteurs communs, $\frac{MN \times H}{NR \times AB}$. Nous posons en conséquence :

$$\frac{MN \times H}{NR \times AB} = \frac{MN}{CD},$$

égalité qui se réduit à la proportion

$$CD : AB :: NR : H.$$

Ainsi, d'abord l'*élévation du point de vue doit être une quatrième proportionnelle à la grande base du trapèze, à sa petite base et à la distance de la première au plan central.*

En second lieu, prenant pareillement le quotient de *ab* divisé par *cd*, et l'égalant à celui de CD par AB, nous obtenons

$$\frac{AB \times NR}{MR \times CD} = \frac{CD}{AB},$$

c'est-à-dire

$$MR : NR :: \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2.$$

Donc il faut, en outre, que *les distances des bases du trapèze au plan central soient proportionnelles aux carrés de ces lignes.*

En vertu de la seconde condition, le point de concours des directions DA, CB est au delà du point R, ou en arrière du plan central, comme évidemment cela devait être (14).

THÉORÈME. (*Fig.* 29.)

88. *Le point de vue étant un point quelconque de l'équateur d'une sphère, et le plan du tableau celui du méridien à* 90 *degrés de ce point, tous les cercles de la sphère ont pour perspectives des cercles.*



Digitized by Google

Désignant par O le point de vue, considérons un cercle quelconque de la sphère, et soit AB celui de ses diamètres qui se trouve dans un même plan avec le centre I et le point O : soit, dans ce plan, EF la trace du plan du tableau. Les deux plans sont perpendiculaires entre eux, puisque le premier contient la droite OI perpendiculaire au second : il en résulte que le triangle ABO divise symétriquement le cône perspectif du cercle considéré. D'une autre part, nommant *a* et *b* les rencontres de AO et BO avec EF, c'est-à-dire les perspectives de A et B, nous avons l'angle F*a*O égal à l'angle B; car chacun d'eux a pour mesure un demi-quart de circonférence, plus la moitié de l'arc AE : par la même raison, l'angle A = E*b*O. Donc toutes les conditions nécessaires pour que la perspective soit un cercle se trouvent satisfaites (33 et 84, *première remarque*).

Le théorème ne fait pas exception pour l'équateur, non plus que pour celui des méridiens qui passe par le point de vue : leurs perspectives sont des droites qu'il est permis de considérer comme des cercles d'un rayon infini.

Le méridien à 90 degrés du point de vue est dans le tableau, et se confond avec sa propre perspective. Un cercle de la sphère situé dans l'hémisphère opposé au point de vue a sa perspective totalement comprise par ce méridien. S'il appartient à l'autre hémisphère, sa perspective est en dehors du même méridien : enfin, s'il est en partie sur un hémisphère et en partie sur l'autre, ce méridien comprendra seulement un arc de la perspective. Ce dernier cas est celui des méridiens quelconques et des parallèles à l'équateur.

Deux cercles qui se coupent sur la sphère se coupent en perspective sous la même inclinaison. Les méridiens et les parallèles à l'équateur se coupent en conséquence à angles droits, sur le tableau comme à a surface de la sphère. Cette propriété n'est pas moins remarquable que la précédente, mais la démonstration n'en est pas aussi simple : on la trouve

Digitized by Google

dans la *Correspondance de l'École Polytechnique* et quelques traités de Géométrie descriptive.

PROBLÈME.

89. *Construire une mappemonde.*

La définition d'une mappemonde, dans le système ordinaire, a été donnée au n° 43. Ce qui importe pour sa construction, c'est d'obtenir les perspectives des parallèles à l'équateur et des méridiens, parce qu'ils déterminent les longitudes et latitudes des divers points de la surface terrestre.

En vertu du théorème précédent, les perspectives demandées sont des arcs de cercle, puisque les perspectives entières seraient des cercles. Deux points de chacun de ces arcs seront toujours connus à priori, comme nous allons le voir, et il s'agira d'en déterminer un troisième point.

Soient, sur la mappemonde (*fig.* 30),

*ab* le diamètre de l'équateur;
*pp'* l'axe de la Terre, passant par les pôles *p* et *p'*;
*apbp'* le premier méridien;
*dc* le diamètre d'un parallèle à l'équateur.

Et proposons-nous d'abord de trouver la perspective de ce parallèle, le point de vue étant conçu au delà du plan de la mappemonde, à l'extrémité du diamètre de l'équateur qui lui est perpendiculaire.

Les deux points *d* et *c*, situés dans le tableau et se confondant avec leurs propres perspectives, font partie de l'arc demandé. Voici comment nous obtiendrons de cet arc un troisième point.

Le méridien perpendiculaire au tableau rencontre la partie antérieure du parallèle en un certain point que je nomme $\omega$, sans le figurer. Concevant par ce point un rayon visuel, rabattons le plan du méridien et le rayon

Digitized by Google

visuel qu'il contient sur le plan de la mappemonde, par une révolution autour de $pp'$. Le rayon visuel rabattu aboutit, d'une part en $a$, de l'autre en $c$, et coupe $pp'$ en $i$: ce dernier point est la perspective du point $\omega$ avant le rabattement; car, si le plan rabattu se relève, $aic$ ne cessera pas de passer en $i$ lorsqu'il reprendra sa position primitive.

Le point $i$ de l'arc demandé est donc, tout simplement, l'intersection de la droite $ac$ avec la droite $pp'$. L'ayant obtenu, nous décrivons un arc de cercle passant par les trois points $c$, $i$, $d$.

L'opération est à peu près identique pour mettre en perspective les méridiens. Les longitudes se comptent sur l'équateur, et nous supposerons que ce soit à partir du point $b$. Considérons cependant un méridien dont la longitude soit égale à l'arc $bc$, comme si les longitudes étaient comptées sur le cercle $pbp'$ : sa perspective, ainsi que celle de tout autre méridien, passera par les points $p$ et $p'$. Pour en trouver un nouveau point, nommons $\alpha$ la rencontre de ce méridien avec la partie antérieure de l'équateur, imaginons un rayon visuel par $\alpha$, et rabattons le plan de l'équateur sur la mappemonde par un mouvement autour de $ab$; le rayon visuel se rabattra suivant $p'c$, et le point $m$ où cette droite coupe $ab$ sera la perspective du point $\alpha$, par la même raison que ci-dessus. Nous ferons donc passer un arc de cercle par les trois points $p$, $m$, $p'$.

Les deux séries d'opérations doivent être appliquées aux deux hémisphères, le point de vue étant placé successivement aux deux extrémités du diamètre.

### PROBLÈME.

*Déterminer la distance centrale d'une image daguerrienne.*

90. Toute image obtenue au daguerréotype, considérée comme une représentation perspective, suppose nécessaire-

Digitized by Google

ment le point de vue à une certaine distance. L'image est renversée, par suite du croisement des rayons, et le point où ils se croisent est le point de vue. Pour déterminer sa position, le premier moyen que l'on conçoit est expérimental : il consiste à mesurer la grandeur perspective d'un objet parallèle au tableau, et à la comparer avec la grandeur et la distance de cet objet lui-même. Si, par exemple, une longueur verticale de 12 mètres, située à la distance de 60 mètres, se réduit sur l'image à $0^m,03$, nous trouvons, par la proportion, $0^m,15$ pour la distance centrale.

Mais il est intéressant de chercher la solution du problème dans la théorie de l'instrument. A cet effet, considérons d'abord la chambre noire sans lentille. Soit (*fig.* 31) un objet extérieur AB et son image *ab* sur la paroi du fond : l'ouverture est très-petite, et tous les rayons se croisent sensiblement en un même point O, qui est le point de vue ; car, sauf l'inversion de l'image, l'effet est le même que si l'on transportait *ab* en *a'b'*, à la même distance de ce point O, et dans cette position elle représenterait manifestement la perspective de l'objet AB.

Le cas où l'on considère une lentille *ef* (*fig.* 32) se ramène au précédent. Les faisceaux de rayons qui partent des divers points de l'objet se croisent, mais en déviant de leurs directions primitives, et devenant moins divergents ; ils viennent frapper la plaque en *ab*, au foyer de la lentille, où concourent en particulier les rayons de chaque faisceau. Or, nous réduirons ces faisceaux à de simples rayons, et leur réfraction est telle, qu'étant prolongés en sens contraire, ils se rencontrent sensiblement en un même point O situé un peu au delà de la lentille, et qui est encore le point de vue. Cela veut dire que l'image *ab*, transportée en *a'b'*, sur les rayons ainsi prolongés et à la même distance du point O, produirait le même effet pour le spectateur placé en O ; mais, dans ce cas, elle représenterait la perspective d'un objet tel

Digitized by Google

que A′B′, compris entre ces mêmes rayons, et dont l'apparence différerait peu de celle de l'objet AB. La distance du point O à l'image dépend de la courbure du verre et de la grandeur de l'objet comparée à sa distance : ordinairement elle surpasse peu la distance focale. C'est à ce point qu'il faudrait rapporter les distances des objets dans l'emploi du moyen expérimental ci-dessus.

Remarquons toutefois ce qui peut résulter de la plus grande convergence des rayons visuels, notamment dans le cas d'une surface courbe. Le contour de l'image produite par la lentille correspond aux mêmes points que ceux dont se compose le contour apparent de la surface de l'objet vu directement du point O; mais il est compris entre des rayons visuels plus convergents : il suppose en conséquence une surface d'une forme un peu différente de la précédente, car si l'on éloignait assez l'objet pour que les rayons eussent ce degré de convergence, son contour apparent changerait nécessairement. Ainsi, rigoureusement parlant, le daguerréotype déforme les objets; mais cet effet est insensible quand leurs dimensions sont peu considérables, relativement à leurs distances.

Ici nous n'examinons pas l'influence, plus notable encore, de l'inégale distance de plusieurs objets à la lentille; d'où il résulte que, si les images de quelques-uns sont au foyer, les autres ne peuvent pas l'être.

Nous n'avons supposé, pour plus de simplicité, qu'une seule lentille dans l'appareil; mais aujourd'hui on les construit avec deux verres, dont la combinaison, désignée à tort sous le nom de *système allemand*, est due à M. Charles Chevalier. La courbure de ces verres et leur disposition, calculées ou déterminées par l'expérience, procurent surtout l'important avantage de distribuer la lumière d'une manière plus uniforme sur toute l'étendue de la plaque.

Digitized by Google

# SECONDE SECTION.

## APPLICATIONS PRATIQUES.

### QUELQUES MOTS SUR LA COPIE D'APRÈS NATURE.

91. Les principes de la théorie, ainsi que les opérations géométriques qui s'y rattachent, ont leur importance et leurs applications spéciales dans la composition. Je dirai cependant quelques mots sur leur utilité pour copier d'après nature ou reproduire un modèle quelconque.

Des objets étant placés sous les yeux d'un spectateur, leur perspective s'obtient par une copie à simple vue et sans constructions de géométrie, parce que la mesure des lignes et des angles de l'espace, conséquence immédiate d'une manière plus rigoureuse d'opérer, n'entre pas dans la pratique de l'art de la peinture. La théorie n'est donc pas ici d'une nécessité absolue, mais il s'en faut beaucoup que ses services soient à dédaigner : elle dirige sans cesse le travail du dessinateur, et lui donne l'explication de toutes les particularités que peuvent offrir les apparences des objets, suivant leurs formes ou leurs positions. C'est ce qu'indique le simple bon sens.

Un peintre paysagiste qui entreprend la copie d'une vue champêtre n'est jamais dispensé de procéder avec méthode. Son premier soin doit être d'arrêter les limites du champ de la perspective, et par suite la correspondance qui s'établit entre quelques points déterminés de l'espace et autant d'autres points du tableau. A cet effet, ayant placé en position verticale sa toile, ou sa feuille de papier s'il ne veut faire qu'un croquis, il s'en éloigne jusqu'à ce que cette surface lui dérobe la portion de terrain à représenter.

Digitized by Google

Il est alors au point de vue : il en profite pour reconnaître les objets dont les rayons visuels effleurent les bords de la toile, et prendre note de leurs perspectives. Il obtient ainsi un certain nombre de points de repère qui lui seront de la plus grande utilité, non-seulement pour rattacher à leurs positions de nouveaux points, mais encore parce que leurs intervalles seront des étalons de mesure, déterminant une échelle de réduction des dimensions de l'espace.

Lorsque ensuite il arrive à l'exécution des parties intermédiaires, il rattache d'abord quelques lignes principales aux points déjà considérés sur le terrain et fixés sur la toile; puis, concevant par chacun d'eux une verticale, il estime approximativement l'inclinaison perspective de la ligne adjacente sur cette verticale : par le point correspondant de la toile il mène une ligne également inclinée sur la verticale qu'il y conçoit, et la direction de cette ligne est obtenue. Quant à sa grandeur perspective, elle se conclut de sa grandeur apparente dans l'espace, comparée avec l'un des intervalles qui déterminent, comme nous l'avons vu, l'échelle de réduction.

En continuant de cette manière et procédant de la circonférence vers le centre, on parvient sans tâtonnement à distribuer tous les détails du tableau dans les places qui leur appartiennent.

Toutefois, cette méthode n'est pas rigoureusement exacte en ce qui concerne l'évaluation des grandeurs perspectives des lignes : elle supposerait en principe que des lignes de même grandeur apparente, ou comprises dans des angles visuels égaux, ont leurs perspectives égales, ce qui n'est absolument vrai que pour un tableau en surface sphérique, le point de vue étant au centre de la sphère. Dans le cas ordinaire d'un tableau à surface plane, des rayons visuels plus inclinés donnent, pour une même ouverture d'angle

Digitized by Google

visuel, une perspective plus grande, et le dessinateur doit tenir compte de la différence, s'il aspire à un certain degré de précision : autrement, il lui arriverait, par exemple, de représenter le contour apparent d'une sphère par un cercle, au lieu d'une ellipse plus ou moins allongée. Mais cette différence est négligeable quand les rayons visuels ne s'écartent pas notablement de l'axe de perspective.

On se sert aussi avec succès de la considération des alignements. Il est clair en effet que, si des points sont en ligne droite sur le terrain, quels que soient les objets divers auxquels ils appartiennent, ces points sont en ligne droite sur le tableau : sans doute la réciproque n'est pas nécessairement vraie; des points peuvent être en ligne droite sur le tableau, sans l'être dans l'espace; mais la première condition suffit à elle seule pour diriger le dessinateur.

Dans la copie d'un ouvrage de peinture, on a recours quelquefois à un artifice qui abrége singulièrement les difficultés de l'esquisse linéaire. On trace à la craie, sur le modèle, un réseau de droites formant des carrés égaux, et un autre réseau tout à fait semblable sur la toile nue. Chaque portion de ligne du modèle se trouve logée dans un carré du premier réseau, et on la représente sur la toile de manière qu'elle ait la même position dans le carré correspondant. Un tel mode de décomposition d'une surface plane se nomme, en géométrie, une division orthogonale.

Le même procédé peut s'étendre à la copie d'un paysage d'après nature, au moyen de l'appareil suivant (*fig.* 33). C'est un châssis vertical *aabb*, garni de fils qui décomposent aussi sa surface en carrés égaux. En avant est un diaphragme percé d'un orifice *o*. Pour s'en servir on le dispose de telle sorte que le châssis couvre le champ de la perspective pour l'œil placé à l'orifice, qui devient, en conséquence, le point de vue. On observe la position que prennent les lignes de l'espace dans les cases du châssis, et l'on en conclut celle

Digitized by Google

qui leur convient sur la toile, où l'on a eu le soin préalable de tracer un semblable système de lignes rectangulaires.

L'usage habituel de cet appareil aurait peut-être l'inconvénient de rendre l'œil paresseux ; mais il est très-propre à donner aux commençants de saines notions sur les directions et les grandeurs perspectives des lignes.

Au reste, on peut demander plus encore aux arts mécaniques. D'ingénieux instruments ont été imaginés depuis quelques années, dans le but de diriger la main du dessinateur et de lui faire décrire avec sûreté le calque des objets à mettre en perspective. Tels sont le *diagraphe* de M. Gavard, l'*hyalographe* de M. Clinchamp, l'*homographe* de M. Burnier, auxquels nous joindrons un ancien appareil nouvellement restauré par M. Rouillé. Les deux derniers paraissent être ceux qui remplissent le moins imparfaitement leur destination, en même temps qu'ils ont l'avantage d'être d'une manœuvre simple et facile. Voici en quoi ils consistent.

Dans l'homographe (*fig.* 34), on remarque trois pièces essentielles : un oculaire fixe *o*, une tablette verticale également fixe *bbcc*, sur laquelle la toile est tendue ; enfin une aiguille ou baguette verticale *gh*, effleurant la tablette et surmontée d'un index *h*. Cette aiguille peut se mouvoir de haut en bas, de droite à gauche, mais en restant verticale et s'appliquant toujours sur la toile. Pour jouir de cette double mobilité, elle est engagée dans un châssis qu'elle fait monter ou descendre avec elle, au moyen de deux coulisses verticales, tandis qu'elle se meut librement dans le sens horizontal, en parcourant deux rainures pratiquées dans les bords horizontaux du même châssis. En un point *a* de l'aiguille est placé le crayon, qu'un ressort tient convenablement pressé contre la toile, et que l'opérateur peut retirer à volonté.

On se sert de cet instrument en saisaissant d'une main

Digitized by Google

la baguette et la conduisant de manière que l'index décrive, pour l'œil placé à l'oculaire, les contours des objets, ou qu'il en cache successivement tous les points. Si l'on exécute bien cette manœuvre, les contours sont exactement reproduits par le crayon, et cette conséquence est d'une rigueur géométrique.

En effet, remarquons d'abord que la baguette peut recevoir un mouvement qui fasse décrire à l'un quelconque de ses points, dans le plan vertical, une courbe donnée, parce que tout mouvement, dans un tel plan, peut résulter de la combinaison de deux mouvements simultanés, l'un horizontal et l'autre vertical. D'une autre part, tous les points de la baguette et tout autre point lié invariablement avec eux, décrivent des courbes parfaitement égales. Mais l'index, se trouvant successivement sur les rayons visuels des différents points des contours des objets, en décrirait la perspective s'il laissait la trace de ses positions dans le plan vertical où il se meut; donc le point de la baguette qui porte le crayon doit la décrire également.

L'opérateur a d'ailleurs la faculté de varier les dimensions proportionnelles de la perspective; il lui suffit d'avancer ou de reculer l'index, de le transporter par exemple de $h$ en $h'$, à l'aide d'un mécanisme inutile à décrire ici. Pour le comprendre, remarquons que la véritable distance centrale du tableau est la distance de l'oculaire au plan vertical dans lequel se promène l'index. Reculer ou avancer l'index, c'est donc effectivement reculer ou avancer le tableau, bien que la toile et l'oculaire restent à leurs places. Si l'on recule l'index jusqu'à la moitié de l'espace qui sépare l'œil d'un objet, la perspective est à l'échelle $\frac{1}{2}$. Pour le portrait, on peut opérer à l'échelle $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$; mais il deviendrait impossible de faire manœuvrer l'appareil en reculant l'index jusqu'à l'objet lui-même, et d'obtenir ainsi une perspective de grandeur naturelle.

Digitized by Google

L'instrument de M. Burnier n'est donc que l'application de quelques procédés fort simples de mécanique aux principes de la perspective, et cependant la conception en est des plus heureuses; le mouvement du crayon sur la toile n'est pas aussi saccadé qu'on pourrait le craindre d'abord, et si le trait est un peu tremblotté par la difficulté de diriger sans tâtonnement l'index sur les contours des objets, on conçoit qu'une longue habitude puisse triompher de cette imperfection.

La définition de la perspective linéaire (1) suppose une toile transparente, conservant la trace des rayons visuels qui la traversent, et, ce qui n'était d'abord qu'une abstraction de la théorie, on en a cherché souvent une réalisation matérielle. Dans ce but, l'appareil dont on fait usage (*fig.* 35) se compose d'un oculaire *o* fixé au dos d'une chaise, et d'une gaze tendue sur un châssis *bbcc*, lequel s'engage entre deux montants verticaux. L'innovation due à M. Rouillé consiste dans un perfectionnement de cette gaze, qui a la propriété d'être assez diaphane pour laisser apercevoir distinctement les objets, et dont le tissu a cependant la consistance nécessaire pour retenir les impressions d'un morceau de fusain ou autre crayon mou qui en parcourt la surface.

Quant à la mise en œuvre de l'appareil, il est facile de la prévoir. L'oculaire qui doit représenter le point de vue, et le tableau ou le châssis ayant été disposés convenablement, l'opérateur prend place sur le siége qu'il passe entre ses jambes; il met un œil à l'oculaire et dessine sur le tissu transparent la perspective des objets telle qu'elle lui apparaît; ensuite il enlève le châssis et l'applique contre sa toile, sur laquelle il fait passer l'empreinte du dessin au moyen d'une légère pression. Cette empreinte n'est par retournée et conserve la position droite de la perspective, parce que les traces du crayon traversent les mailles du tissu

Digitized by Google

dont la face en contact avec la toile est celle qui était dirigée vers les objets.

Sans doute, le calque que l'on obtient par ce procédé n'a pas une pureté parfaite, et les détails d'une certaine délicatesse lui échappent totalement; mais les positions sont rendues avec exactitude dans leur ensémble, le plan de l'ouvrage est arrêté, et c'est déjà beaucoup, car on n'ignore pas que cette partie de la tâche des artistes leur est généralement assez fastidieuse.

L'invention de M. Rouillé est toute récente, et celle de M. Burnier ne date pas de deux années. L'expérience n'a donc pas encore prononcé sur leur valeur comparative, non plus que sur l'importance des services réels qu'elles doivent rendre l'une et l'autre à la pratique. On comprend d'ailleurs que leurs résultats ne seront le plus ordinairement que des croquis, par suite de l'impossibilité de les obtenir sur une grande échelle. Pour en faire usage dans la copie d'un tableau, on doit placer l'oculaire au point de vue, condition sans laquelle le tableau et sa copie ne supposeraient pas exactement les mêmes objets dans l'espace (21).

Le daguerréotype peut être mis à contribution pour atteindre au même but. On sait avec quelle magique instantanéité il donne une vue de monument, l'ébauche d'un paysage et même une sorte de portraits. Certes, c'est là pour l'artiste une ressource, principalement dans les voyages d'exploration.

Les images daguerriennes sont, quant à la perspective linéaire d'un objet, d'une sensible exactitude et d'un fini microscopique, lorsque l'objet, de peu d'étendue, a pu être parfaitement *mis au foyer* (90). Mais cet avantage est encore aujourd'hui leur principal mérite, malgré les perfectionnements apportés au procédé depuis son origine. Le modelé y laisse beaucoup à désirer, et c'est ce qui s'explique aisément.

Digitized by Google

En effet, les rayons de diverses couleurs exercent une action très-inégale sur la substance chimique qu'ils impressionnent; d'où il résulte que le rapport des tons de lumière de la nature ne peut se conserver sur l'image. Les couleurs qui tirent sur le rouge et le jaune produisent des teintes obscures, tandis que, dans les mêmes tons de lumière, les nuances bleuâtres donnent des clairs presque à l'égal du blanc. Les portraits au daguerréotype sont notablement affectés de ce grave défaut, pour peu que le visage du modèle soit coloré : on trouve, avec raison, qu'ils *vieillissent*, parce qu'ils creusent les joues et détruisent le relief des parties sanguines de la carnation. On comprend donc comment il arrive qu'ils rendent assez rarement le véritable caractère d'une tête.

Si toutefois les objets sont monochromes, non-seulement la forme est accusée avec fidélité, mais l'effet peut être harmonieux et quelquefois des plus suaves. Le procédé réussit particulièrement dans la copie d'une gravure en taille-douce ou à l'*aqua-tinta*, lorsque le sujet est gracieux et les lumières bien dégradées. On obtient des images remarquables par le velouté soyeux des demi-teintes, non moins que par l'exquise délicatesse des détails. C'est ainsi que sont reproduites les gravures des délicieuses compositions de Léopold Robert, de Winterhalter et autres célèbres peintres, avec un succès qui excite l'admiration des amateurs. Les ouvrages originaux eux-mêmes, substitués à leurs gravures, ne donneraient pas, à beaucoup près, d'aussi heureux résultats.

Les oppositions un peu fortes d'ombre et de lumière sont un écueil que l'opérateur photographe évite avec le plus grand soin. C'est qu'en effet les portions de l'image vivement éclairées sont sujettes à s'obscurcir par une trop longue exposition dans la chambre noire; il arrive ainsi que l'on retire de l'appareil des épreuves où les clairs sont déjà *brûlés*, lorsque la durée de l'exposition était à peine suffisante

Digitized by Google

pour faire paraître les demi-teintes. Règle générale, les objets à daguerréotyper ne comportent que la lumière diffuse : le noir et le blanc éclatant ne peuvent y contraster. Pour une vue champêtre, le soleil doit être voilé par quelque nuage, et le ciel brumeux à l'horizon.

L'application du daguerréotype au paysage est encore limitée par l'impossibilité de mettre au foyer tout le champ de la perspective. A mesure que la vue s'étend, l'image conserve sa netteté pour la petite zone qui se trouve dans un rapport convenable de position avec le foyer de la lentille, mais elle devient confuse pour le reste. De là, pour l'opérateur, la nécessité de sacrifier, ou les plans éloignés, ou les plans rapprochés, suivant qu'il attache plus d'importance à la représentation des uns ou des autres.

En résumé, malgré les imperfections inhérentes à sa nature, le daguerréotype, employé dans les limites qu'il comporte, est un admirable instrument de perspective linéaire, et, sous ce rapport, il peut rendre au peintre d'utiles services (*).

---

(*) Quelques savants ont exprimé l'opinion qu'un jour peut-être on parviendrait à fixer les couleurs naturelles des objets sur les images de la chambre noire. Ce serait assurément une chose merveilleuse, mais la théorie nous dit que son accomplissement est à jamais impossible. En effet :

Le prodige, s'il s'accomplissait, serait le résultat d'une action physique ou d'une action chimique de la lumière. Mais d'abord, on sait que tous les effets purement physiques de ce fluide n'ont d'autre durée que celle de sa propagation dans les milieux où ils se produisent. Ainsi, une surface qui reçoit des rayons de lumière et n'en éprouve aucune action chimique, les renvoie, ou les détruit, ou les décompose, ou les modifie de telle manière qu'on voudra, puis elle n'en conserve aucune trace.

Si on laisse de côté la phosphorescence, phénomène encore mystérieux, mais toujours peu durable, les effets chimiques de la lumière consistent dans des combinaisons de molécules, c'est à-dire dans la formation, sous l'influence de cet élément, de corps composés, lesquels généralement sont blancs ou noirs par leur nature, ou prennent des nuances intermédiaires entre ces deux extrêmes, selon que la combinaison est plus ou moins complète. Ici sans doute, et fort malheureusement pour le daguerréotype, les rayons de



Digitized by Google

92. Lorsqu'on dessine une vue, on a rarement le loisir d'en figurer tous les détails ; il en est aussi qui doivent être ajoutés pour embellir la scène, quels que soient les moyens d'exécution qu'on a employés : ce sont des personnages à distribuer sur les divers plans, des barques sur la rive d'un fleuve, etc. D'autres, au contraire, doivent être élagués, parce qu'ils n'ont rien de pittoresque. Toutes ces modifications se font après coup, et la grandeur perspective des objets surajoutés se détermine par celle des parties auxquelles ils se rattachent.

Le soleil poursuit sa course pendant le travail du dessinateur, et les ombres prennent successivement de nouvelles directions. Il importe donc de marquer les ombres et les lumières des objets terrestres assez promptement pour les rapporter à une même époque de la journée. On mettra plus de diligence encore à esquisser les contours des nuages, les ombres qu'ils projettent sur une vaste plaine, et surtout ces reflets plus ou moins éclatants qui réveillent leurs bords du côté du soleil. Ces détails fugitifs, saisis dans leur ensemble tels qu'ils apparaissent à un instant donné, ont une vérité et un effet harmonieux qu'on ne pourrait atteindre en cherchant à les faire de souvenir, ou par les règles de la composition. Mais ici la célérité de l'exécution est d'autant plus nécessaire que l'aspect du ciel est sans cesse variable, et que, dans ces parties, le peintre doit joindre à l'esquisse linéaire une légère ébauche de coloris, parce qu'il veut rendre principalement un effet de perspective aérienne.

---

diverses couleurs ont une puissance d'action inégale; mais, à cela près, ils tendent tous à produire le même résultat. On ne saurait donc admettre aucune connexion entre la couleur des rayons et celle qu'ils font acquérir à la substance impressionnable. A bien plus forte raison n'en existe-t-il aucune qui puisse donner lieu à des composés chimiques se trouvant tous, *par leur propre nature*, précisément des mêmes nuances que les rayons sous l'influence desquels ils se seraient formés.

Digitized by Google

Enfin les ouvrages dont le dessin serait demeuré incomplet, ou qui exigeraient de plus importantes modifications, rentreraient parmi ceux qui doivent être traités d'après les règles de la composition.

## DE LA COMPOSITION.

93. Si l'artiste qui renferme la spécialité de son talent dans la peinture d'imitation peut se priver impunément du secours de la théorie, il n'en est pas ainsi de celui qui transporte ses sujets dans le champ de l'idéal et s'élève jusqu'à la composition. Pour le paysagiste, elle devient, en effet, d'une évidente nécessité; mais le peintre d'histoire lui-même ne pourrait disposer convenablement sur la toile les groupes de ses personnages, les édifices qui les environnent ou se succèdent sur les plans intermédiaires, une contrée lointaine formant aussi un accessoire de son sujet, s'il n'était dirigé, dans l'ordonnance de ces créations de sa pensée, par les principes de la science. C'est même à l'artiste qui compose qu'il semble permis d'aspirer, dans la détermination des lignes, à une rigueur mathématique, parce que, disposant arbitrairement des dimensions et des distances des objets, il possède tous les éléments de leur représentation perspective.

Or, des objets quelconques étant conçus dans l'espace, pourvu qu'ils aient des formes définies, nous allons voir comment on peut déterminer et fixer sur la toile leur perspective linéaire. A cet effet, nous considérerons les grandeurs géométriques dans le même ordre que précédemment quand nous en faisions un examen purement spéculatif. Ces grandeurs seront données de position au moyen de certains éléments évalués en nombres.



Digitized by Google

## § Ier.

### MISE EN PERSPECTIVE D'UN POINT.

### *Définition et usage des coordonnées.*

94. Dans la théorie, nous avons souvent fait usage de trois plans, d'une position invariable, que nous nommions *plan central, plan normal* et *plan d'horizon :* ils passent tous les trois par le point de vue et se coupent à angles droits. Or, la position variable d'un point dans l'espace sera déterminée et connue, dès que nous connaîtrons ses distances à ces trois plans, pourvu qu'on nous dise si le point est au-dessus ou au-dessous du plan d'horizon, à droite ou à gauche (*) du plan normal. D'ailleurs, il sera toujours supposé en avant du plan central (1).

Par exemple, qu'un point soit situé à 10 mètres au-dessus du plan d'horizon, à 15 mètres du plan normal vers sa droite, et à 120 mètres du plan central : pour trouver ce point, nous concevrons à 10 mètres au-dessus du plan d'horizon un plan horizontal, il devra contenir le point cherché ; de même, des plans conçus parallèlement aux deux autres, à 15 mètres du plan normal vers sa droite et à 120 mètres du plan central, devront passer par le point ; donc sa position sera l'intersection des trois plans.

Ce mode de détermination de la position des points et des objets qu'ils composent semble fort naturel, et c'est celui que nous adoptons. Lors donc que nous prendrons arbitrairement un système de points dans l'espace, il sera censé que nous fixons la position de chacun d'eux par ses distances aux trois plans invariables.

---

(*) J'entends *à droite ou à gauche* par rapport au spectateur.

Digitized by Google

Soient X, Y, Z les distances d'un point quelconque au plan normal, au plan d'horizon et au plan central; X, Y, Z seront les *coordonnées aériennes* du point, chacune d'elles isolément étant une *ordonnée;* les intersections des trois plans seront les *axes* des coordonnées, et les plans eux-mêmes seront dits *plans coordonnés*. L'axe des Z n'est donc autre chose que l'axe de perspective; l'axe des Y est l'intersection du plan normal avec le plan central, et l'axe des X l'intersection du plan central avec le plan d'horizon.

Le plan normal et le plan d'horizon coupent le plan du tableau, suivant deux droites rectangulaires qui sont la ligne d'horizon et la ligne normale. Nous déterminerons la distance d'un point sur le tableau, par ses distances à ces deux droites, sachant d'ailleurs si le point est au-dessus ou au-dessous de la première, à droite ou à gauche de la seconde.

Soient $x$ et $y$ ces distances : $x$ et $y$ seront les *coordonnées perspectives* du point; les lignes d'horizon et normale deviendront les axes de ces nouvelles coordonnées. Nous supposerons ces axes tracés sur la toile, préalablement à toute opération. Si cependant le point de vue était plus ou moins élevé que la limite supérieure ou inférieure de la toile, la ligne d'horizon ne pourrait être tracée que sur un prolongement de cette surface; mais, du reste, la manière d'opérer ne changerait pas.

95. Cela posé, la distance d'un point à un plan ou à une droite se mesure par la perpendiculaire abaissée du point sur le plan ou sur la droite, et nous devrons nous figurer les coordonnées comme de telles perpendiculaires. Or, si l'on veut qu'un point du tableau soit la perspective d'un point dans l'espace, il faut que les coordonnées $x$ et $y$ du premier soient les perspectives des coordonnées X et Y du second; car les plans perspectifs des lignes X et Y, coupant

Digitized by Google

le plan du tableau suivant des droites parallèles aux axes des $x$ et des $y$, et passant en outre par la perspective du point, coïncident avec les coordonnées $x$ et $y$. Ainsi *les coordonnées perspectives sont la perspective des coordonnées aériennes*, propriété au moyen de laquelle il nous sera facile d'obtenir les premières au moyen des secondes.

Dans les applications numériques, nous distinguerons les points situés au-dessus ou au-dessous, à droite ou à gauche des plans coordonnés, en plaçant le signe — devant la valeur de X lorsque le point sera situé à gauche du plan normal, ou devant celle de Y lorsqu'il sera au-dessous du plan d'horizon. Dans les mêmes cas, il est clair que la perspective sera à gauche de la ligne normale, ou au-dessous de la ligne d'horizon, ce que nous indiquerons par le même signe devant la valeur de $x$ ou de $y$.

Maintenant, pour trouver les coordonnées perspectives du point, ou sa position sur le tableau, j'indiquerai successivement deux méthodes.

*Méthode par le calcul.*

96. Désignons par $\delta$ la distance centrale : cette distance est arbitraire et donnée dans chaque question. Nous aurons, en vertu de l'article précédent et du n° 17, ces deux proportions :

$$Z : \delta :: X : x,$$
$$Z : \delta :: Y : y,$$

d'où nous conclurons les valeurs de $x$ et $y$. Le calcul revient à multiplier X et Y par le rapport de $\delta$ à Z. Prenons-en quelques exemples.

PREMIER EXEMPLE. (*Fig.* 36.)

*Mettre en perspective un point conçu dans l'espace à* 32 *mètres vers la droite du plan normal, à* 18 *mètres au-*

Digitized by Google

*dessus du plan d'horizon et à 76 mètres du plan central, la distance centrale étant de 4 mètres.*

Pour le point dans l'espace nous avons

$$X = 32^m, \quad Y = 18^m, \quad Z = 76^m;$$

donc nous aurons, pour sa perspective,

$$76 : 4 :: 32 : x, \quad 76 : 4 :: 18 : y;$$

d'où nous concluons

$$x = 1^m,684 \quad \text{et} \quad y = 0^m,947,$$

à moins d'un millimètre. Cela fait, soient $x'x$ et $y'y$ les deux axes du tableau, et V le centre de perspective. Nous prenons sur le premier une longueur V$b$ égale à $1^m,684$, et nous élevons la verticale $ba$ égale à $0^m,947$. Le point $a$ est la perspective du point proposé.

Un opérateur pourvu d'une équerre graduée, c'est-à-dire de deux règles soudées à angle droit et divisées métriquement, exécutera cette construction d'un seul trait, en évitant de figurer la droite $ba$, puisqu'il suffit de marquer son extrémité.

DEUXIÈME EXEMPLE. (*Fig.* 37.)

*Mettre en perspective un point situé à 35 mètres à gauche du plan normal, à 52 mètres au-dessus du plan d'horizon et à 216 mètres du plan central, la distance centrale étant* $1^m,9$.

Nous avons

$$X = -35^m, \quad Y = 52^m, \quad Z = 216^m.$$

Un calcul semblable au précédent donnera

$$x = -0^m,308 \quad \text{et} \quad y = 0^m,457.$$

Nous portons la première valeur à gauche du point V, en

Digitized by Google

considération du signe —, et nous élevons la verticale *ba* égale à la seconde.

TROISIÈME EXEMPLE. (*Fig.* 38.)

*Mettre en perspective un point situé à* 30 *mètres à gauche du plan normal, à* 20 *mètres au-dessous du plan d'horizon et à* 84 *mètres du plan central, la distance centrale étant* 3 *mètres.*

Nous trouverons

$$x = -1^{m},071 \quad \text{et} \quad y = -0,714,$$

et la construction de ces valeurs sur le tableau donnera le point *a* qu'indique la figure.

QUATRIÈME EXEMPLE. (*Fig.* 39.)

*Mettre en perspective un point situé dans le plan d'horizon, à* 12 *mètres du plan normal et à* 45 *mètres du plan central, la distance centrale étant* $2^{m},4$.

Ici nous avons $Y = 0$, d'où résulte évidemment $y = 0$; nous trouvons d'ailleurs $x = 0^{m},640$. Le point est en conséquence sur la ligne d'horizon, à $0^{m},640$ du centre de perspective; il est encore représenté par *a* dans la figure.

97. *Remarques.* Lorsqu'on doit opérer pour un certain ensemble de points, il est avantageux de faire d'abord le calcul de toutes les coordonnées perspectives; leur construction sur le tableau s'exécutera ensuite sans désemparer, en faisant courir une équerre graduée sur la ligne d'horizon et l'arrêtant dans la position qui convient à chaque point.

Les valeurs numériques, dans les exemples ci-dessus, ont été calculées à moins d'un millimètre. En général, le degré d'approximation nécessaire dépend des dimensions de la toile ou de la distance centrale. Pour un petit tableau,

Digitized by Google

destiné à être vu de près, on calculera des dixièmes de millimètre; sur une très-vaste toile, les centimètres pourraient suffire. Il semblerait donc rationnel, dans les problèmes qui doivent suivre, de régler le degré d'approximation des coordonnées perspectives sur la distance centrale : cependant, pour les présenter d'une manière plus uniforme, nous les évaluerons tous à 1 millimètre, en observant seulement que le chiffre des millimètres sera augmenté d'une unité, lorsque la valeur décimale qui suivrait vaudra plus qu'un demi-millimètre : il en résultera une erreur par excès, moindre que l'erreur par défaut. Ce degré de précision dans les valeurs des coordonnées perspectives nous fixera sur celui que nous devrons donner, dans chaque problème, aux coordonnées aériennes.

Cette remarque n'est pas sans importance pour la pratique; elle se rattache à des principes de calcul trop souvent négligés et qui sont l'objet d'une note de l'Appendice, à laquelle je renvoie en ce moment.

*Méthode graphique.*

98. La méthode graphique suppose qu'on veut obtenir la perspective d'un point ou d'un système de points sur une feuille de papier, pour la reproduire ensuite à la surface définitive du tableau. Les dimensions de l'espace y sont réduites d'après une échelle arbitraire, et, les coordonnées perspectives étant obtenues par une construction géométrique, on les amplifie suivant le rapport inverse de l'échelle. Il est vrai que, dans l'emploi que l'on fait communément de cette méthode, on ne se sert pas de coordonnées; mais nous conserverons l'usage de ce mode de représentation des points proposés, d'autant plus qu'il offre le moyen le plus rationnel pour reporter la perspective du papier sur la toile.

Digitized by Google

Cela posé, considérant la surface du papier comme celle de l'horizon perspectif, et, prenant une échelle de réduction arbitraire, construisons (*fig.* 40) la droite OZ, représentant l'axe des Z, partant du point de vue O; la droite $x'$V$x$, intersection du plan du tableau avec le plan d'horizon, de manière que OV soit égale à la distance centrale; enfin le point A, pied de la verticale abaissée du point donné dans l'espace sur le plan d'horizon. Tirons sur OZ la perpendiculaire ADA', telle que DA' égale l'ordonnée Y du même point, toutes ces grandeurs étant prises dans la réduction de l'échelle. Tirons aussi A'KO, AIO. Les longueurs que nous trouverons aux lignes IV et KV seront, suivant la même réduction, les valeurs des coordonnées perspectives $x$ et $y$ demandées. Car, nous avons manifestement ces deux proportions :

$$\text{OD} : \text{OV} :: \text{DA} : \text{IV},$$
$$\text{OD} : \text{OV} :: \text{A'D} : \text{KV};$$

c'est-à-dire, en désignant par $\delta$ la distance centrale OV,

$$\text{Z} : \delta :: \text{X} : \text{IV},$$
$$\text{Z} : \delta :: \text{Y} : \text{KV};$$

proportions qui ne s'accordent avec celles du n° 96, qu'autant que IV et KV sont les valeurs de $x$ et de $y$.

On peut aussi, comme on le fait ordinairement, au lieu de mesurer les longueurs de IV et VK, élever perpendiculairement à $x'x$ la droite I$a$ = KV, et le point $a$ se trouve situé, à l'égard des lignes $x'x$, OZ, comme doit l'être sur le tableau la perspective du point par rapport à la ligne d'horizon et à la ligne normale. Dans ce cas, si le point dans l'espace est au-dessous de la ligne d'horizon, il faut opérer de manière que le point $a$ soit au-dessous de $x'x$; si le point était situé à gauche du plan normal, sa perspective serait portée à gauche de OZ.

Digitized by Google

EXEMPLE. (*Fig.* 40.)

*Mettre en perspective un point pour lequel* $X = 2^m$, $Y = 3^m$, $Z = 5^m$, *la distance centrale étant* $0^m,4$.

Si nous opérons sur une assez grande feuille, nous pouvons réduire seulement les mètres en décimètres. Nous prenons donc $OV = 0^m,04$, $OD = 0^m,5$, $DA = 0^m,2$ et $DA' = 0^m,3$. Exécutant ensuite la construction indiquée, nous trouvons $IV = 0^m,16$ et $KV = 0^m,24$. Nous concluons que les valeurs des coordonnées perspectives doivent être sur la toile :

$$x = 1^m,6 \quad \text{et} \quad y = 2^m,4,$$

comme nous les aurions trouvées par la méthode précédente.

99. *Remarques*. La construction doit être modifiée lorsque le point donné dépasse un certain éloignement, car il faut alors réduire beaucoup les dimensions de l'espace; et comme la distance centrale devient très-petite relativement à cet éloignement, les coordonnées perspectives n'auraient plus assez d'étendue pour être déterminées avec précision. Dans ce cas, on éloigne le tableau du point de vue, et $x'x$ se trouve transporté, par exemple, en $x''x'''$ (*fig.* 40). Il en résulte pour les coordonnées perspectives un accroissement proportionnel dont on tient compte. Toutefois, il importe de remarquer que, s'il y avait une erreur dans la position du point A, l'erreur qui s'ensuivrait dans les coordonnées perspectives croîtrait aussi proportionnellement.

Dans la pratique, ce n'est pas seulement sur un point isolé qu'on doit opérer, mais sur tout un système de points composant, par exemple, la circonférence d'une courbe. Si l'on construit chacun d'eux (*fig.* 41), comme nous avons

Digitized by Google

construit le point $a$, on obtient, par leur ensemble, la perspective de la courbe rapportée aux lignes $x'x$, OZ, de la même manière qu'elle doit l'être aux axes du tableau. Mais alors, pour dégager cette perspective des lignes de construction, on descend chacun de ses points, suivant une parallèle à OZ, d'une distance égale, de sorte qu'elle se trouve rapportée à une ligne telle que $x_1x_2$, au lieu de l'être à $x'x$.

Enfin, nous avons supposé les coordonnées évaluées explicitement et traduites en nombres : mais il peut n'en être pas ainsi surtout lorsque la position d'un point résulte graphiquement de certaines opérations qui précèdent la mise en perspective, comme nous le verrons bientôt. Dans tous les cas, l'application de la méthode reste la même.

*Comparaison des deux méthodes.*

100. Des deux méthodes qui viennent d'être exposées, la première donne des résultats plus exacts et n'est sujette à aucune modification. Elle doit être préférée de beaucoup, lorsque les coordonnées aériennes ont des valeurs numériques données à priori, ou faciles à déduire des éléments du problème. Pour ce motif et pour d'autres que nous serons à même d'apprécier plus loin, nous l'adopterons généralement. Si toutefois la nature de l'ouvrage n'exigeait pas une grande précision, on pourrait, dans certains cas, combiner les deux procédés : après avoir calculé les coordonnées perspectives de quelques points principaux et les avoir construits sur la toile, on rattacherait à leur position les détails de la perspective obtenus graphiquement, et simplement en la copiant à vue.

Au reste, la véritable difficulté des opérations de perspective n'est pas dans l'application de l'une ou l'autre de ces méthodes, mais dans la détermination des coordonnées

Digitized by Google

aériennes des points de l'espace, ou, d'une manière quelconque, de la position de ces points, lorsqu'ils ne dépendent que par des rapports plus ou moins éloignés des données initiales du problème. On parvient à cette détermination au moyen des opérations de géométrie déjà mentionnées et indiquées ci-après sous un titre spécial; mais, avant d'aborder ce nouveau sujet, nous résoudrons une question liée naturellement avec les précédentes.

*Problème inverse de la mise en perspective d'un point.*

**101.** Nous avons vu comment de la position d'un point dans l'espace peut se conclure sa perspective. Cherchons réciproquement à conclure de la perspective la position du point dans l'espace.

En conservant les notations du n° 96, les éléments du problème sont liés entre eux par les deux proportions

$$Z : \delta :: X : x,$$
$$Z : \delta :: Y : y.$$

Ces proportions ne suffisent pas pour déterminer les coordonnées X, Y, Z, si l'on ne connaît que $x$ et $y$. Mais, si l'on nous donne $\delta$ et l'une des coordonnées aériennes, par exemple Z, nous obtenons les deux autres, savoir :

$$X = \frac{Z \times x}{\delta}, \quad Y = \frac{Z \times y}{\delta}.$$

Nous savions déjà (9) que la perspective d'un point est une donnée insuffisante pour faire connaître sa position dans l'espace; mais nous voyons que l'indétermination cesse lorsqu'à cette donnée on en joint deux autres, telles que la distance centrale et l'une des coordonnées aériennes. Un ouvrage de peinture dont chaque point porterait une *cote*, c'est-à-dire l'indication de sa hauteur au-dessus d'un plan de niveau, et pour lequel on donnerait, en outre, la dis-

Digitized by Google

tance centrale, serait donc une représentation géométrique et complète des objets de l'espace, en même temps qu'il en offrirait une image pittoresque.

*Des constructions géométrales.*

102. La mise en perspective d'un objet quelconque se ramène toujours à celle d'un certain nombre de ses points que l'on considère particulièrement, et que nous appellerons des points *principaux*. L'énoncé du problème fera toujours connaître immédiatement la position, dans l'espace, d'un point ou d'un petit nombre de points principaux, et la liaison qui existe entre tous les points, d'après la nature particulière de l'objet. Or, les premiers étant obtenus sur le tableau, nous pourrons quelquefois en conclure sur la toile la perspective des autres, notamment au moyen de la propriété des points du concours; mais, en général, nous devrons commencer par déterminer leur position dans l'espace, en exécutant certaines opérations géométriques sur une feuille de papier qui prendra le nom d'*épure*.

Les opérations de l'épure supposent les grandeurs de l'espace réduites proportionnellement, et, dans l'échelle de réduction, on peut les considérer comme s'appliquant à ces grandeurs elles-mêmes; mais comme elles s'exécutent sur une surface plane, elles doivent souvent satisfaire à cette condition, de ramener à des constructions de géométrie plane des problèmes de géométrie aux trois dimensions, ce qui est le but général de la Géométrie descriptive. Les points de l'espace sont projetés (221) sur un plan horizontal d'une position connue, indépendamment de leurs projections sur d'autres plans; ce plan de projections est celui que représente la surface de l'épure, et il se nomme *géométral;* deux droites (*fig.* 43) X'X, OZ, représenteront, sur le plan géométral, les axes des X et des Z, ou du

Digitized by Google

moins leurs projections se coupant en O, projection du point de vue.

Quelquefois, le plan géométral représenté par la surface de l'épure ne sera pas, dans l'espace, parallèle au plan d'horizon, mais à l'un des deux autres plans coordonnés, parce que nous le trouverons plus avantageux pour les constructions. Le choix de ce plan est toujours arbitraire.

Dans tout problème où nous n'aurons à mener, aucune ligne dépendante de la position du plan central, nous rapprocherons ce plan des points considérés dans l'espace, afin d'opérer sur une plus grande échelle : nous diminuerons ainsi toutes les ordonnées Z d'une même quantité, que nous devrons ensuite leur restituer. Il est évident que le même déplacement est permis à l'égard des autres plans coordonnés.

La considération du tableau, ou de la distance centrale, reste d'ailleurs tout à fait étrangère à ces opérations, que nous nommerons des *constructions géométrales*.

Cela posé, on trouvera dans l'Appendice, à la fin du volume, les principes de Géométrie descriptive dont nous aurons désormais à faire usage, et sur lesquels nous ne pourrions nous étendre en ce moment sans trop nous écarter de notre sujet. Dans chaque occasion, je renverrai à ces principes, et j'invite le lecteur à les parcourir dans leur ensemble quand bien même il en aurait déjà quelques notions, parce qu'ils sont appropriés aux applications que nous devons en faire. Ici seulement je répéterai que les constructions géométrales, exécutées d'une manière quelconque, seront généralement destinées à faire connaître les valeurs numériques des coordonnées aériennes des points considérés dans l'espace, lorsque ces valeurs ne résulteront pas immédiatement des données du problème. Les coordonnées perspectives s'en concluront par le calcul, comme précédemment (96).

Digitized by Google

## § II.

### MISE EN PERSPECTIVE D'UNE DROITE.

*Conventions sur la manière de fixer la direction d'une droite dans l'espace.*

103. Une droite peut être donnée dans l'espace d'après diverses conditions: ainsi on peut donner la position de chacune de ses extrémités, et sa mise en perspective rentre dans ce qui précède, puisque, ces deux points étant obtenus sur le tableau, il n'y a plus qu'à les joindre par une droite.

Mais il arrive plus souvent, dans la pratique, qu'une droite est donnée par une seule de ses extrémités, sa longueur et sa direction; et, dans cette hypothèse, il importe d'abord de savoir comment la direction d'une droite peut elle-même être donnée.

Or, nous supposerons cette direction déterminée par deux angles, savoir: l'angle compris entre la droite et sa projection sur un plan horizontal, et l'angle formé par cette projection avec le plan central. Le premier de ces angles sera l'*inclinaison* de la droite, et le second sa *déclinaison*.

Chacun des deux angles peut d'ailleurs être mesuré par sa graduation, c'est-à-dire évalué en degrés, minutes et secondes, comme c'est l'usage; mais je le supposerai de préférence déterminé par le rapport de deux droites, de cette manière: soit un angle quelconque A (*fig.* 42); d'un point quelconque B de l'un de ses côtés, abaissons une perpendiculaire BC sur l'autre côté. Le rapport de BC à CA (*) sera la mesure de l'angle A. On aurait tort de penser, sans doute, que ce rapport croît proportionnellement à l'angle; mais du moins il croît avec l'angle suivant une loi quelconque,

(*) C'est la tangente trigonométrique de l'angle A.

Digitized by Google

et cela suffit pour qu'il puisse lui servir de mesure. Dans la mesure d'un angle d'inclinaison, BC, l'antécédent du rapport, sera toujours le côté vertical : ce sera le côté perpendiculaire au tableau dans la mesure d'une déclinaison.

Toutefois, les valeurs de ces rapports ne déterminent complétement la direction de la droite dans l'espace, qu'autant qu'on spécifie le sens de l'inclinaison ou de la déclinaison; car, dans un même plan, on peut concevoir deux droites formant des angles égaux avec une même droite, et cependant ayant des directions différentes. Il faut savoir aussi dans quel sens s'étend la droite sur sa direction. Or, toute incertitude cessera dès que nous saurons si, à partir du point donné, la droite s'éloigne du plan central de gauche à droite ou de droite à gauche, et de même si elle est ascendante vers la droite ou vers la gauche.

Cette manière de mesurer la direction d'une droite est la plus conforme à la nature de la plupart des applications pratiques; elle est appropriée à la construction des angles au moyen d'une équerre graduée, qu'on doit toujours préférer au rapporteur (*); on y trouve aussi l'avantage de calculer facilement la position du point accidentel (110). Cependant, nous emploierons quelquefois la graduation, lorsqu'elle sera exactement de 45, de 30 ou de 60 degrés, parce que les angles de ces valeurs sont faciles à construire sans le secours du rapporteur. Un angle de 45 degrés s'obtient par un triangle rectangle isocèle; c'est le cas où le rapport ci-dessus se réduit à l'unité. Pour un angle de 30

(*) Le rapporteur qui entre dans l'assortiment des boîtes de mathématiques est un instrument très-imparfait. Ses dimensions excessivement réduites et son échancrure au centre ne comportent aucune précision. Une équerre graduée est préférable, d'autant plus qu'elle permet d'opérer à volonté dans de grandes ou de petites dimensions. Il conviendrait néanmoins, pour les applications pratiques, d'en avoir de diverses grandeurs, une en cuivre pour l'épure, et d'autres en métal ou en bois pour la toile.



Digitized by Google

ou de 60 degrés, on décrit un triangle rectangle dont l'un des côtés soit la moitié de l'hypoténuse.

104. Maintenant, une droite étant donnée, par la position de l'une de ses extrémités, sa grandeur et sa direction, pour la mettre en perspective, nous examinerons d'abord les cas les plus simples, en la supposant parallèle à l'un des plans coordonnés. Ainsi :

1°. Si la droite est parallèle au plan central, nous calculerons les coordonnées perspectives du point donné et la grandeur perspective de la droite (17). Par ce point, construit sur le tableau, nous mènerons une parallèle à la droite dans l'espace, d'une longueur égale à sa perspective, et le problème sera résolu.

2°. Si la droite est parallèle au plan d'horizon, nous obtiendrons les coordonnées aériennes de l'extrémité qui n'est pas donnée, au moyen de cette construction géométrale fort simple :

Le plan de l'épure étant considéré comme le plan horizontal qui contient la droite dans l'espace, soient construits par rapport aux axes OZ, X'X (*fig.* 43), le point A représentant son extrémité donnée, et la droite AB ayant la grandeur et la direction qu'on lui suppose dans l'espace. Son extrémité B se trouvera déterminée, et nous mesurerons les lignes BR et RO qui en représentent les ordonnées Z et X. Quant à son ordonnée Y, elle est connue d'avance et la même que celle du point A.

Connaissant donc les coordonnées aériennes des deux extrémités de la droite, nous les mettrons en perspective, et la perspective de la droite elle-même s'ensuivra.

L'opération est la même pour une droite parallèle au plan normal, en considérant la surface de l'épure comme parallèle à ce plan, et alternant entre elles les ordonnées X et Y.

Digitized by Google

3°. Supposons maintenant que la droite ait une direction quelconque, donnée par sa déclinaison et son inclinaison; il s'agit encore de trouver la position de l'extrémité qui n'est pas donnée.

Prenant pour plan géométral le plan d'horizon, construisons (*fig.* 44), par rapport aux axes OZ, X'X, le point A, projection horizontale de l'extrémité donnée, et tirons l'indéfinie AC parallèle à la projection horizontale de la droite, au moyen de sa déclinaison supposée connue; il est clair que AC devra contenir la projection horizontale de l'autre extrémité.

Pour achever la construction, nous emploierons un plan vertical de projections parallèle à la droite. Soit PQ sa ligne de terre (223): le point qui se projette horizontalement en A se projettera verticalement en A' que nous trouvons sur la perpendiculaire AGA' (226), en prenant GA' égale à l'ordonnée Y de ce point. La droite et sa projection verticale devant être parallèles (221), nous tirons A'B', ayant sur la ligne de terre l'inclinaison donnée de la droite et de même longueur : ce sera cette projection verticale. Abaissant la perpendiculaire B'HB, nous obtenons le point B, projection horizontale du point cherché. Il ne reste donc plus qu'à mesurer les lignes B'H, BR, RO qui sont les ordonnées Y, Z, X du point (B, B').

*Remarques.* Nous aurions simplifié la construction en faisant passer le plan vertical de projection par la droite elle-même, de sorte que PQ se serait confondu avec AC; c'est ce que l'on doit faire quand on opère sur une seule droite; mais on a souvent à opérer sur plusieurs droites parallèles, et comme on doit les projeter sur un même plan vertical, il convient de prendre ce plan en dehors de toutes les droites.

Nous aurions pu aussi prendre pour plan géométral un



Digitized by Google

plan horizontal différent de celui d'horizon, ce qui reviendrait à diminuer ou augmenter toutes les ordonnées Y d'une même quantité.

Si l'on voulait construire graphiquement la perspective (98), il faudrait, après avoir obtenu le point (B, B′) comme ci-dessus, projeter les deux extrémités de la droite sur le plan normal, ce qu'indique la *fig.* 45; après quoi on opérerait comme au n° 98, et l'on obtiendrait la perspective *ab*.

Voici des exemples numériques :

UNE VERTICALE. (*Fig.* 46.)

105. *Mettre en perspective une verticale* AB (*) *longue de* 24 *mètres, le point* A *ayant cette position :*

$$A \begin{cases} X = -\ 7^{m}, \\ Y = \ \ 6, \\ Z = \ 90. \end{cases}$$

*La distance centrale est de* $2^{m},5$.

Nous trouvons immédiatement :

$$a \begin{cases} x = -\ 0^{m},194 \\ y = \ \ 0,167 \end{cases} \qquad ab = 0,667.$$

En conséquence, nous construisons sur le tableau le point *a*, nous tirons la verticale *ab*, dans le sens qui lui convient, longue de $0^{m},667$, et le problème est résolu.

UNE HORIZONTALE. (*Fig.* 47.)

106. *Mettre en perspective une horizontale* AB, *longue de* 150 *mètres, et située à* 30 *mètres au-dessus du plan*

(*) Dans ce problème et tous les suivants, les petites lettres de l'alphabet correspondent sur le tableau aux lettres majuscules dans l'espace. Les figures ne représenteront souvent que les perspectives.

Digitized by Google

*d'horizon. Sa déclinaison* = 7 : 5, *de sens tel que la droite, à partir du point* A, *s'éloigne du point central de gauche à droite.*

$$A \begin{cases} X = 12^{m}, \\ Z = 260. \end{cases}$$

*La distance centrale* = $1^{m},5$.

Pour exécuter la construction géométrale prescrite pour le cas de cet exemple (**104**, 2°), nous pourrons opérer à l'échelle de 1 centième, en rapprochant d'ailleurs le plan central de la droite (**102**, *rem.*). Si nous obtenons les coordonnées du point B sur l'épure à moins de 1 dix-millième de mètre dans cette réduction, nous les connaîtrons dans l'espace à moins de 1 décimètre; et nous trouverons (note de l'*App.*) que cette approximation suffit pour déterminer, en tenant compte de la distance centrale, les coordonnées perspectives à moins de 1 millimètre, comme nous les voulons généralement. Nous devrons obtenir ainsi :

$$B \begin{cases} X = 44^{m},5 \\ Z = 305,6. \end{cases}$$

Pour les deux points A et B, l'ordonnée Y = 30 mètres. Nous en concluons :

$$a \begin{cases} x = 0^{m},069 \\ y = 0,173 \end{cases} \qquad b \begin{cases} x = 0,218 \\ y = 0,147. \end{cases}$$

Ces points étant construits sur la toile, nous tirons *ab* qui est la perspective demandée.

UNE AUTRE HORIZONTALE. (*Fig.* 48.)

**107.** *Mettre en perspective une horizontale* AB *longue de* 320 *mètres, située à* 20 *mètres au-dessous du plan d'ho-*

Digitized by Google

*rizon ; sa déclinaison* = 13 : 6, *de sens tel qu'elle s'éloigne de droite à gauche.*

$$A \begin{cases} X = 42^{m}, \\ Z = 530. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 4 *mètres.*

Dans cet exemple, le rapport de la distance centrale à l'ordonnée Z du point B sera plus fort que dans le précédent, et nous devrons opérer de manière à obtenir les coordonnées de ce point à $\frac{1}{2}$ décimètre dans l'espace, pour les conclure à moins de 1 millimètre sur le tableau. Il est vrai que la distance centrale suppose à la toile d'assez grandes dimensions, et qu'on pourrait en conséquence y négliger plus qu'un millimètre ; mais nous resterons fidèle à notre convention sur le degré d'approximation des coordonnées perspectives. En conséquence, nous trouverons :

$$B \begin{cases} X = -92^{m},1 \\ Z = 820,5, \end{cases}$$

et, par suite, en observant que pour les deux extrémités de la droite on a Y = — 20 mètres,

$$a \begin{cases} x = 0^{m},317 \\ y = -0,151 \end{cases} \qquad b \begin{cases} x = -0,449 \\ y = -0,098, \end{cases}$$

valeurs au moyen desquelles nous construirons, comme précédemment, la droite *ab*.

UNE DROITE DE POSITION QUELCONQUE. (*Fig.* 49.)

108. *Mettre en perspective une droite* AB, *longue de* 24 *mètres ; sa déclinaison* = 3 : 4 *et son inclinaison* = 5 : 2, *de sens tels que la droite, à partir du point* A, *descend vers le point* B *de gauche à droite, et s'éloigne du plan central*

Digitized by Google

*aussi de gauche à droite.*

$$A \begin{cases} X = -20^{m}, \\ Y = 12, \\ Z = 50. \end{cases}$$

*La distance centrale* $= 2^{m},5$.

Le problème se rapporte au cas général (104, 3°); les coordonnées aériennes devront être déterminées à 1 centimètre près, et nous n'y parviendrons que par une grande précision dans la construction géométrale. Nous trouverons:

$$B \begin{cases} X = -12^{m},87 \\ Y = -10,28 \\ Z = 55,35; \end{cases}$$

par suite, nous aurons

$$a \begin{cases} x = -1^{m},000 \\ y = 0,600 \end{cases} \qquad b \begin{cases} x = -0,583 \\ y = -0,464 \end{cases}$$

valeurs que nous porterons sur la toile.

*Remarque.*

109. On peut juger, par ces premières applications numériques, de la nécessité d'opérer sur l'épure dans d'assez grandes dimensions, et des avantages que l'on trouve à employer pour les constructions géométrales toute l'étendue de la surface sur laquelle on les exécute. On est forcé d'opérer sur une moindre échelle quand on y construit graphiquement la perspective, en même temps que les lignes se multiplient; mais, indépendamment de ces nouvelles causes d'inexactitude, on ne doit pas oublier que, pour le transport de la perspective ainsi obtenue, on doit multiplier toutes ses dimensions par le rapport inverse de l'échelle : si donc les lignes de l'espace ont été réduites

Digitized by Google

au centième, elle devrait être exacte à 1 cent-millième de mètre sur l'épure, pour l'être à 1 millimètre sur la toile. On ne gagne rien à l'amplifier en reculant le tableau (99), parce qu'on amplifie proportionnellement les erreurs, du moins celles qui viennent de l'inexactitude des projections géométrales.

*Détermination du point accidentel d'une droite.*

110. Il est quelquefois avantageux de connaître à priori le point accidentel d'une droite : or, nous y parviendrons à l'aide d'un petit calcul très-facile, en nous donnant la direction d'après les conventions du n° 103.

Supposons d'abord la droite horizontale, et soit $m : n$ son rapport de déclinaison. Il est évident que la distance centrale $\delta$ et la distance $x$ du point accidentel au centre de perspective sont entre elles comme $m : n$. Dès lors, nous déterminerons celle-ci par la proportion $m : n :: \delta : x$.

Dans le cas d'une direction quelconque, nous concevrons par le point de vue O (*fig.* 50) une droite OU parallèle à la proposée, rencontrant le tableau en U; et, sur OU comme diagonale, le parallélépipède OVTU, dont les faces sont parallèles aux plans coordonnés. VT est l'ordonnée $x$ du point U cherché, et nous l'obtiendrons par la même proportion que ci-dessus : nous calculerons ensuite OT comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle; et, désignant par $p : q$ le rapport d'inclinaison donné, nous déterminerons UT, ou l'ordonnée $y$ du même point, par la nouvelle proportion $q : p :: \text{OT} : y$. Enfin, nous affecterons les résultats du signe —, s'il y a lieu, d'après le sens de déclinaison ou d'inclinaison.

On trouverait ainsi, pour les points accidentels des horizontales des n$^{os}$ 106 et 107, $x = 1^m,071$ et $x = -1^m,846$; pour celui de la droite inclinée du n° 108, $x = 3,333$ et $y = -10,417$.

Digitized by Google

*Division perspective d'une droite en parties égales ou proportionnelles.*

**111.** L'opération dont il s'agit, fondée sur la propriété des points de concours, s'exécute sur le tableau. On peut l'énoncer ainsi : *Une droite de l'espace étant divisée en parties égales, ou proportionnelles à des nombres donnés, trouver en perspective les points de division.* Pour l'effectuer, nous distinguerons plusieurs cas, selon que la droite est parallèle à l'un des plans coordonnés ou de direction quelconque.

1°. Si la droite est parallèle au plan central, nulle difficulté : nous savons (16) qu'elle doit être divisée sur le tableau comme dans l'espace.

2°. Si elle est horizontale, soient (*fig.* 51) *ab* sa perspective, *xy* la ligne d'horizon, et supposons d'abord que les parties doivent être égales dans l'espace. Tirons l'horizontale *ak*, et portons-y, à partir du point *a*, une longueur arbitraire *ap* autant de fois à la suite d'elle-même qu'il doit y avoir de ces parties : du point *f*, où nous nous arrêtons, tirons *fb* prolongé jusqu'à la rencontre de *xy* en *g*; puis *gp*, *gq*, *gr*, ... aux points de division de *af* : ces lignes diviseront *ab* de la manière demandée.

En effet, concevons, par l'extrémité A de la droite dans l'espace, l'horizontale AF parallèle au tableau, et de longueur telle que *af* soit sa perspective ; il est évident, par la propriété des points de concours, que les droites *gp*, *gq*,... sont les perspectives d'autant de droites parallèles à FB, et qui diviseraient AF et FB en parties égales.

Si les parties ne devaient pas être égales, mais être entre elles dans des rapports donnés, au lieu de porter une même longueur *ap* à la suite d'elle-même, on porterait des longueurs qui fussent entre elles dans ces rapports, et par ailleurs l'opération ne changerait pas.

Digitized by Google

Mais la construction est en défaut quand la droite de l'espace est dans le plan d'horizon, parce que toutes les droites que nous venons de considérer sur le tableau se confondent alors avec la ligne d'horizon. Il faudrait dans ce cas l'élever ou l'abaisser parallèlement à elle-même jusqu'à une certaine distance de ce plan, et la mettre en perspective dans sa nouvelle position : on effectuerait ensuite, comme ci-dessus, l'opération sur la nouvelle perspective, et par les points de division on ferait passer des verticales qui diviseraient la perspective donnée de la manière voulue.

Pour une droite parallèle au plan normal, il suffirait de remplacer dans cette construction la ligne d'horizon par la ligne normale.

3°. Supposons à la droite une direction quelconque, et soit (*fig.* 52) *ab* sa perspective. Sur la droite AB, comme diagonale, dans l'espace, nous concevons un parallélipipède ayant ses faces parallèles aux plans coordonnés, et dans lequel nous prenons la projection AC de la même droite sur l'une des deux faces horizontales, par exemple sur la face inférieure. Cette projection AC étant implicitement comprise dans les données de la question, nous construisons sa perspective *ac*; et, puisqu'elle est horizontale, nous la divisons perspectivement en autant de parties égales qu'on en demande pour la proposée, en appliquant la règle établie pour le premier cas : par les points de division nous élevons des verticales qui divisent *ab* de la manière voulue. Car ces verticales sont les perspectives de celles que l'on conçoit dans l'espace, divisant AC, et par suite AB, de cette même manière.

*Remarque.* Toutes ces opérations s'exécutent sur le tableau, où l'on doit cependant éviter, autant que possible, de multiplier les lignes simplement auxiliaires. Mais on reconnaîtra avec un peu d'attention que, dans le cas même

Digitized by Google

le plus général, celles de ces lignes qui doivent être nécessairement tracées peuvent se réduire à deux, si, à l'égard des autres, on se borne à marquer les points d'intersection qu'elles déterminent. Une remarque analogue pourra s'appliquer à quelques autres opérations.

## § III.

### MISE EN PERSPECTIVE D'UN POLYGONE.

112. Un polygone, ou toute figure plane résultant d'une combinaison quelconque de lignes droites, devant être mise en perspective, je supposerai généralement que l'on connaisse la position du polygone dans son plan, et la position de ce plan par rapport aux plans coordonnés. Le plan du polygone sera déterminé de position par sa trace dans un plan parallèle à l'un des plans coordonnés et son inclinaison sur ce dernier plan, qui sera presque toujours le plan d'horizon; la direction de la trace sera fixée par sa déclinaison, et le sens d'inclinaison du plan ou de déclinaison de sa trace sera spécifié dans chaque question proposée. Observons d'ailleurs que donner le polygone dans son plan, c'est donner son rabattement sur le plan qui contient sa trace, en supposant que le rabattement résulte d'un mouvement de révolution autour de cette droite.

Ces conventions admises, nous examinerons successivement quelques cas particuliers et le cas général du problème.

1°. Le plan du polygone peut être parallèle au tableau. La perspective est alors un autre polygone semblable au premier, et les côtés homologues sont parallèles. On connaît ordinairement la position de l'un des sommets de l'espace, parce qu'elle sert à fixer, avec la direction des côtés, la position du polygone lui-même. En conséquence, nous

Digitized by Google

mettrons ce point en perspective, nous calculerons par la règle du n° 17 la grandeur perspective de chaque côté, et avec ces éléments nous construirons sur le tableau le polygone demandé. Quand la longueur d'un côté est obtenue, on peut aussi se servir, pour calculer les suivants, des rapports qui doivent exister entre eux et le premier, d'après la nature particulière du polygone.

2°. Le polygone peut être parallèle au plan d'horizon, et dans ce cas il faut souvent employer une construction géométrale : mais elle se réduit à construire sur l'épure le polygone proposé, tel que ABCDE (*fig.* 53), rapporté aux axes OZ, X'X, ou à leurs projections, et à mesurer les ordonnées X et Z de chacun de ceux de ses sommets pour lesquels ces valeurs sont inconnues. Leurs ordonnées Y ont une valeur commune, égale à la distance du plan du polygone au plan d'horizon.

L'opération est analogue pour un polygone parallèle au plan normal.

3°. Le plan du polygone peut être perpendiculaire à l'un des plans coordonnés. Supposons, par exemple, qu'il le soit au plan d'horizon. Dans ce cas, la trace du plan étant donnée dans un plan horizontal d'une position connue, nous prenons ce dernier plan pour géométral, nous construisons cette trace MN (*fig.* 54) et le rabattement ABCDE du polygone, puisque ce rabattement est aussi connu ; nous abaissons de ses sommets des perpendiculaires à MN. Ces perpendiculaires, augmentées ou diminuées de la distance du plan géométral au plan d'horizon, sont les valeurs des ordonnées Y de ces divers points relevés dans leur position primitive. Leurs pieds sont les projections horizontales des mêmes points et déterminent sur l'épure leurs ordonnées X et Z, qui seront, par exemple, KR et RO pour le point A. Nous aurons donc à mesurer toutes ces lignes.

4°. Enfin, considérons un polygone de position quel-

Digitized by Google

conque, dont la trace MN (*fig.* 55) soit donnée dans un plan horizontal. Nous prenons encore ce dernier plan pour celui que représente l'épure, et nous construisons le rabattement ABCDE du polygone. Nous concevons un plan vertical de projections perpendiculaire au plan donné, ayant en conséquence sa ligne de terre PQ perpendiculaire à MN, du reste quelconque. La trace du plan du polygone dans ce plan vertical sera une droite PS, formant l'angle QPS égal à l'inclinaison du plan donné sur le plan d'horizon (224), laquelle est supposée connue, et nous tirons cette droite. Cela posé, nous obtenons la projection verticale A′ d'un sommet quelconque A, relevé dans l'espace, en abaissant AK perpendiculaire à PQ et décrivant du centre P l'arc de cercle KA′; et par suite sa projection horizontale $A_1$, en abaissant une nouvelle perpendiculaire $A'IA_1$ jusqu'à la rencontre de la droite $AA_1$ menée perpendiculairement à MN. Le point $A_1$ détermine, par sa position sur l'épure, les ordonnées X et Z du point considéré; et A′I, son ordonnée Y, en tenant compte de la distance du plan géométral au plan d'horizon.

Cette construction se rapporte au problème du relèvement d'un plan, en géométrie descriptive (230) : elle doit être répétée pour chacun des autres sommets.

*Remarque.* Quelquefois l'opération est susceptible de se simplifier, soit par la position particulière d'un certain nombre de côtés du polygone à l'égard des plans coordonnés, soit par la propriété des points de concours : mais nous ne devions établir que des méthodes générales. Nous emploierons le plus ordinairement la propriété des points de concours comme moyens de vérification des résultats obtenus sur le tableau.

Faisons maintenant des applications numériques, correspondant à quelques-uns de ces cas.

Digitized by Google

UN CARRÉ DANS UN PLAN HORIZONTAL. (*Fig.* 56.)

113. *Un carré* ABCD, *dont le plan est horizontal, a* 60 *mètres de côté, et il est situé à* 20 *mètres au-dessous du plan d'horizon. La déclinaison de* AB = 4 : 5 *de sens tel que la droite, à partir de* A, *s'éloigne de gauche à droite.*

$$A \begin{cases} X = 15^{m}, \\ Z = 150. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Le problème se rapporte au cas 2° du numéro précédent. La construction géométrale indiquée pour ce cas nous donnera les ordonnées X et Z des points B, C, D. Nous ne reproduirons pas nos observations relatives au degré d'approximation que l'on doit chercher à atteindre dans leur détermination sur l'épure. Quant aux ordonnées Y, elles sont toutes égales à — 20. Voici ce que l'on trouvera si l'on opère bien :

$$B \begin{cases} X = 61^{m},85 \\ Z = 187,48 \end{cases} \quad C \begin{cases} X = 24,37 \\ Z = 234,38 \end{cases} \quad D \begin{cases} X = -22,48 \\ Z = 196,85; \end{cases}$$

nous en concluons par le calcul :

$$a \begin{cases} x = 300^{mm} \\ y = -400 \end{cases} \quad b \begin{cases} x = 989 \\ y = -320 \end{cases}$$

$$c \begin{cases} x = 312 \\ y = -256 \end{cases} \quad d \begin{cases} x = -342 \\ y = -305. \end{cases}$$

La construction de ces quatre points sur la toile donne le quadrilatère *abcd*. Les côtés opposés, étant parallèles dans l'espace, doivent avoir des directions concourantes sur la ligne d'horizon, ce qui vérifiera la construction, si l'étendue de la toile le permet.

Digitized by Google

UN RECTANGLE DANS UN PLAN HORIZONTAL. (*Fig.* 57.)

**114.** *Un rectangle horizontal* ABCD *est situé à* 16 *mètres au-dessous du plan d'horizon; son côté* AB *est parallèle au tableau et long de* 18 *mètres; l'autre* BC *a* 40 *mètres.*

$$A \begin{cases} X = -14^{m}, \\ Y = \quad 60. \end{cases}$$

*La distance centrale* $= 2^{m},5$.

Ce problème est du nombre de ceux que nous résolvons sans construction géométrale, parce que les coordonnées des points A, C, D se concluent immédiatement de celles du point A. D'ailleurs, elles ne sont pas toutes nécessaires; nous prenons seulement les points A, C, avec le côté AB, et trouvons pour leurs perspectives :

$$a \begin{cases} x = -583^{m} \\ y = -667 \end{cases} \qquad ab = 750 \qquad c \begin{cases} x = \quad 100 \\ y = -400. \end{cases}$$

En conséquence, nous construisons sur la toile le point *a*, par lequel nous menons l'horizontale *ab* longue de $2^{m},5$, puis le point *c*, et nous tirons *bc*. La position du point *d* s'ensuit : nous l'obtenons comme l'intersection d'une horizontale menée par le point *c* avec une fuyante *a*V dirigée du point *a* vers le centre de perspective. Cela se comprend sans explications.

La droite *bc* doit aussi se trouver dirigée vers le centre de perspective, si la construction est exacte.

On peut également employer à la vérification du problème les points accidentels des diagonales *ac* et *bd*. En appliquant la règle du n° 110, on trouve la distance de chacun de ces points au centre perspectif égal à $1^{m},125$. Enfin, la droite que l'on dirigerait de ce dernier point vers la rencontre des diagonales devrait diviser les bases du trapèze en parties égales.

Digitized by Google

UN PENTAGONE DANS UN PLAN INCLINÉ SUR L'HORIZON. (*Fig.* 58.)

115. *Un pentagone régulier* ABCDE *a* 7 *mètres de côté; il est situé dans un plan incliné de* 45 *degrés sur l'horizon; sa position, dans ce plan, est symétrique par rapport à la direction de la droite* AG, *qui mesure la plus courte distance du point* A, *son sommet le moins élevé, à la trace* MN *du même plan dans un plan horizontal;* AG=8 *mètres; on donne la position du point* G, *savoir :*

$$G \begin{cases} X = -\ 2^{m}, \\ Y = -\ 9, \\ Z = \ \ 72. \end{cases}$$

*La déclinaison de* MN = 4 : 3; *le sens de cette déclinaison et celui de l'inclinaison du plan du polygone sont tels, que* MN *s'éloigne de droite à gauche, et le plan est ascendant de gauche à droite.*

*La distance centrale* = 6 *mètres.*

Ici nous devons appliquer la méthode générale (112, 3°), relative à un polygone de position quelconque. A cet effet, prenant pour géométral le plan horizontal qui contient la trace MN, et qu'on suppose situé à 9 mètres au-dessous du plan d'horizon, comme l'indique l'ordonnée Y du point G, nous construisons sur l'épure, ce dernier point, la trace MN au moyen de sa déclinaison, le rabattement du point A d'après la longueur de la distance GA, et par suite le rabattement du polygone dont on nous donne la grandeur et la position relative à GA. Enfin, nous exécutons l'opération du numéro précité. Il est sans doute inutile d'ajouter que, pour éviter une excessive réduction des dimensions de l'espace, nous rapprochons considérablement le plan central de ces diverses constructions (102). Rien n'empêche, par exemple, de faire passer l'axe des X par le point G, ce qui

Digitized by Google

revient à diminuer toutes les ordonnées Z de 72 mètres, qu'on leur restituerait ensuite. En opérant avec précision, nous devons trouver :

$$A\begin{cases} X = \overset{m}{2,52} \\ Y = -3,34 \\ Z = 75,39 \end{cases} \quad B\begin{cases} X = 8,25 \\ Y = -0,43 \\ Z = 72,61 \end{cases} \quad C\begin{cases} X = -10,72 \\ Y = 4,27 \\ Z = 77,16 \end{cases}$$

$$D\begin{cases} X = 6,52 \\ Y = 4,27 \\ Z = 82,76 \end{cases} \quad E\begin{cases} X = -1,45 \\ Y = -0,43 \\ Z = 81,67, \end{cases}$$

d'où nous concluons par le calcul :

$$a\begin{cases} x = \overset{mm}{201} \\ y = -266 \end{cases} \quad b\begin{cases} x = 682 \\ y = -36 \end{cases} \quad c\begin{cases} x = 833 \\ y = 332 \end{cases}$$

$$d\begin{cases} x = 472 \\ y = 310 \end{cases} \quad e\begin{cases} x = 107 \\ y = -32. \end{cases}$$

Ces valeurs portées sur la toile y déterminent le polygone *abcde*, dont la construction ne présente aucune difficulté.

La diagonale *be* et le côté *dc* sont les perspectives de deux droites horizontales et parallèles : leurs prolongements devraient donc rencontrer la ligne d'horizon en un même point, qui servirait à vérifier le problème, s'il ne sortait pas des limites de la toile.

*Polygones réguliers et assemblages de ces polygones.*

116. Lorsqu'une figure est régulière ou douée d'une certaine symétrie, l'opération de sa mise en perspective est susceptible de se simplifier. On peut même quelquefois, en s'étayant des rapports de grandeur qu'ont entre eux les éléments d'un polygone régulier, éviter la construction géométrale. Par exemple (*fig.* 59) :

*Soit un hexagone régulier horizontal* ABCDE, *ayant* 15 *mètres de côté, situé à* 25 *mètres au-dessous du plan*



Digitized by Google

*d'horizon,* AB *étant parallèle au tableau;*

$$A \begin{cases} X = 12^{m}, \\ Z = 72. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Pour construire sa perspective, il suffit d'obtenir sur le tableau les points *a*, *b*, *e*. Or, en vertu d'une propriété de l'hexagone régulier, la droite AE égale le côté AB multiplié par $\sqrt{3}$, c'est-à-dire par 1,73205... : on trouve, en conséquence, AE = $25^{m},98$; il en résulte immédiatement:

$$E \begin{cases} X = 12^{m}, \\ Z = 97,98. \end{cases}$$

Pour tous les points Y = — 25 mètres, d'où :

$$a \begin{cases} x = 333^{mm} \\ y = -694 \end{cases} \quad ab = 417 \quad e \begin{cases} x = 245 \\ y = -513. \end{cases}$$

Ayant porté ces valeurs sur la toile, nous obtenons le point *d* par la rencontre de l'horizontale *ed* avec la fuyante *b*V; nous tirons par le point *i*, rencontre des diagonales *ad*, *be*, l'horizontale *cminf*, telle que *cm* = *mi* = *in* = *nf*, d'où résultent les points *c* et *f*. Enfin nous achevons par des lignes de jonction *bf*, *fd*, *ef*, *fa* la perspective demandée *abcdef*.

Nous avons fait dépendre la construction du polygone de celle de trois de ses sommets, en nous fondant sur quelques propriétés des lignes parallèles ou perpendiculaires au tableau; mais, dans la pratique, on trouverait préférable de déterminer directement les positions d'un plus grand nombre de points, par leurs coordonnées, dont le calcul est très-simple : l'opération serait plus exacte et même peut-être plus expéditive. Ces diverses propriétés serviraient alors de vérifications.

Digitized by Google

117. Les assemblages de polygones réguliers se présentent souvent dans la pratique : leur mise en perspective, d'après notre méthode, exige peu de constructions géométrales. On sait que trois sortes de polygones réguliers seulement sont susceptibles de couvrir parfaitement une surface plane par la juxtaposition de leurs côtés; mais il faut y joindre les assemblages de polygones de deux ou plusieurs espèces, par exemple une combinaison d'octogones et de carrés; à cet égard, nous examinerons les cas les plus usuels.

*Assemblage de carrés.* Supposons d'abord les carrés rangés sur des lignes parallèles au tableau, et soit (*fig.* 60) AB un de ces côtés connu de grandeur et de position. Nous construisons sa perspective *ab*, et là prolongeons d'autant de longueurs *bc*, *cd*,... égales à elle-même qu'il y a de côtés BC, CD,... sur cet alignement; nous tirons ensuite les fuyantes *a*V, *b*V,... vers le centre perspectif.

Soit L le sommet le plus éloigné sur la direction AL perpendiculaire au tableau. La position de ce point se conclut immédiatement de celle du point A et du nombre des rangées de carrés. Sa perspective étant construite, divisons perspectivement (111) AL en autant de parties égales que cette ligne contient de côtés; *g*, *h*, *k*,... étant les points de division, tirons des horizontales par ces points; elles détermineront, par leurs rencontres avec les fuyantes, les perspectives des carrés, ce qui est évident.

Il est bon de noter qu'un assemblage ne se présente pas toujours complet, c'est-à-dire exactement contenu dans un rectangle tel que AMNL : mais on peut toujours opérer comme s'il l'était, sauf à supprimer ensuite sur les bords ou vers le centre ce qui doit être couvert par des objets quelconques.

Soit maintenant un assemblage de carrés rangés obliquement au tableau (*fig.* 61). La position de quelques-uns de



Digitized by Google

ses sommets sera connue ou facile à déterminer par une construction géométrale. Supposons, en conséquence, obtenus sur le tableau les points *a*, *m*, *n*, *l*, ainsi que *ak*, perspective d'une diagonale AK passant par une série de sommets. Divisons perspectivement *al*, *am*, *ak* en autant de parties égales que ces lignes en contiennent dans l'espace; par les points situés sur *ak* tirons des droites aux points situés sur *al* et *am*, en les prolongeant dans le sens opposé; ces lignes correspondent aux lignes BPB′, CQC′,..., EPE′, FQF′,..., et déterminent en conséquence, par leurs intersections, la perspective de l'assemblage proposé.

Si l'une des trois directions AL, AM, AK avait son point accidentel dans les limites du tableau, l'opération se simplifierait. Soit *t*, par exemple, le point accidentel de AM; on diviserait perspectivement les seules lignes *al*, *am*, et l'on mènerait aux points de division situés sur *am* les lignes *tb*, *tc*,...; par les rencontres de celles-ci avec *ak* et les points situés sur *al*, on tirerait des transversales, et le problème serait résolu.

Enfin, si l'on supposait en outre que *ak* rencontrât aussi la ligne d'horizon, il suffirait de diviser perspectivement *al*, et l'on opérerait en considérant les sommets des carrés comme les rencontres des diagonales parallèles à AK avec les parallèles à AM.

*Assemblage d'hexagones.* Considérons un assemblage d'hexagones réguliers horizontaux (*fig.* 62), où chaque polygone ait deux côtés parallèles au tableau. Concevons par tous les sommets des perpendiculaires et des parallèles à cette direction. Nous éviterons la construction géométrale en remarquant que les parties AB, BC, CD,... sont alternativement égales à la moitié et à la totalité d'un côté, et que les autres parties AG, GH, HK,... sont toutes égales à la moitié d'un côté multipliée par $\sqrt{3}$. La position du point L, le plus éloigné sur la direction AL, sera facile à

Digitized by Google

en conclure, au moyen de celle du point A que nous supposerons connue.

Maintenant, calculons et construisons sur le tableau la perspective *abcd*... et le point *l*. Divisons perspectivement AL en autant de parties égales qu'elle en contient; par les points de division menons des horizontales, et par les points *a*, *b*, *c*,... des fuyantes *a*V, *b*V, *c*V,...: les rencontres alternatives de ces deux systèmes de lignes détermineront sur le tableau les sommets des polygones, et nous achèverons leurs perspectives par des lignes de jonction.

Les lignes ponctuées dans la figure, employées subsidiairement, devront être tracées seulement à la craie et disparaître après la construction.

*Assemblage d'octogones.* Des octogones réguliers ne peuvent se juxtaposer de manière à couvrir parfaitement une surface. Mais, si on les fait se toucher seulement par quatre côtés opposés, les vides qu'ils laissent entre les autres côtés sont des carrés. Considérons un tel système d'octogones et de carrés, rangés sur des lignes parallèles au tableau et horizontales (*fig.* 63).

Nous concevrons par tous les sommets deux séries de lignes, les unes perpendiculaires, les autres parallèles au tableau; et, pour opérer sans construction géométrale, nous observerons que chacune des portions de ligne AB, CD, DE, FG,... est égale à la moitié d'un côté multipliée par $\sqrt{2}$ ou 1,4142..., et chacune des autres BC, GH,... égale à un côté. Les parties situées sur AL sont égales aux précédentes et se succèdent dans le même ordre; d'où résulte la position du point L, celle de A étant connue.

En conséquence, construisons la perspective *abcdef*... et le point *l*. Divisons *ab* en parties correspondantes à celles de AL, au moyen d'une division perspective en parties proportionnelles (111); par les points de *al* tirons des horizontales, et par *a*, *b*, *c*,... des fuyantes vers le centre perspectif:

Digitized by Google

les rencontres par intervalles périodiques de ces deux systèmes de lignes détermineront les sommets des octogones, dont nous achèverons les périmètres par des lignes de jonction.

Pour effectuer la division de *al*, il faut prendre sur *am* des longueurs proportionnelles aux parties AG, GH,..., ou à leurs égales AB, BC,.... Or, rien n'empêche de prendre les parties mêmes *ab*, *bc*,..., si la diagonale *ml* menée par l'extrémité rencontre la ligne d'horizon dans les limites du tableau; mais, dans le cas contraire, on devra prendre des longueurs proportionnelles plus petites.

*Autre assemblage d'hexagones.* Des hexagones disposés comme dans la *fig.* 64 ont pour intervalles des losanges. Nous appliquerons à leur assemblage un réseau de lignes passant par les points A, B, C, D..., G, H.... Chacune des parties BC, CD,... égalera un côté, et chacune des autres AG, GH,... un côté multiplié par $\sqrt{3}$. L'opération sera du reste analogue à ce qui précède, et plus simple que dans le cas du premier assemblage d'hexagones.

## § IV.

### MISE EN PERSPECTIVE D'UNE COURBE PLANE.

118. Une courbe plane sera donnée dans l'espace, comme un polygone, par sa position dans son plan et la position de ce plan à l'égard des plans coordonnés. L'opération de sa mise en perspective consiste généralement à prendre sur sa circonférence un certain nombre de points principaux plus ou moins rapprochés, selon le degré d'exactitude qu'on veut atteindre. Par ces points, obtenus sur la toile, on fait passer un trait continu, qui est la perspective demandée. Or, des points pris sur la circonférence

Digitized by Google

d'une courbe peuvent être considérés comme les sommets d'un polygone inscrit, et dès lors l'opération se ramène à ce qui a été dit pour les polygones.

Toutefois, il y a dans la perspective d'une courbe des points particuliers qu'il est important de connaître à priori : ce sont les points où les tangentes ont une direction verticale ou horizontale, et que nous avons nommés (31) *latéraux* ou *culminants*, parce qu'ils limitent ordinairement la perspective dans le sens horizontal, ou dans le sens vertical. Or, d'après ce que nous avons établi en théorie, nous obtiendrons les points qui leur correspondent dans l'espace, en déterminant les rencontres de l'axe des Y ou de l'axe des X avec le plan de la courbe, et menant par ces points des tangentes à sa circonférence. Pour réaliser cette conception, l'opération de géométrie descriptive est facile. Si nous prenons pour géométral le plan d'horizon, la rencontre de l'axe des X avec le plan de la courbe est la rencontre de cet axe avec la trace de ce plan dans le géométral; et nous mènerons de ce point des tangentes au rabattement de la courbe, ou à sa projection géométrale, si elle est donnée : les contacts correspondront aux points culminants. L'opération se compliquerait un peu si nous prenions pour géométral un plan horizontal différent du plan d'horizon lui-même. Pour les points latéraux, on pourrait substituer, dans cette opération, le plan normal au plan d'horizon : mais nous trouverons préférable de conserver pour géométral le plan d'horizon. Nous construirons la section faite dans le plan de la courbe par un plan perpendiculaire à la trace du précédent et contenant l'axe des Y. Le point de rencontre de cet axe avec la section sera celui à partir duquel nous devrons mener les tangentes. On comprendra d'ailleurs les simplifications applicables aux cas où le plan de la courbe est parallèle ou perpendiculaire à l'un des plans coordonnés.

Digitized by Google

Le cercle est la seule espèce de ligne courbe considérée dans les problèmes ci-après. On peut le traiter comme une courbe quelconque, mais la disposition symétrique de ses points facilite et abrége les constructions.

UN CERCLE PARALLÈLE AU TABLEAU. (*Fig.* 65.)

119. *Un cercle, dont le plan est parallèle au tableau, a* $9^m,5$ *de rayon; son centre* I *a cette position :*

$$I \begin{cases} X = -\ 3^m, \\ Y = \ \ 5, \\ Z = \ 30. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

La perspective du cercle proposé est un second cercle (33), dont le centre et le rayon se déterminent immédiatement, ce qui donne, en désignant ce rayon par $r$,

$$i \begin{cases} x = -\ 200^{mm} \\ y = \ \ 333 \end{cases} \qquad r = 633.$$

Nous décrivons donc, du point $i$ construit sur la toile et pris pour centre, un cercle du rayon de 633 millimètres : c'est la perspective demandée.

UN CERCLE HORIZONTAL. (*Fig.* 66.)

120. *Un cercle horizontal, du rayon de* 8 *mètres, est situé à* 12 *mètres au-dessous du plan d'horizon. On a pour son centre :*

$$I \begin{cases} X = 16^m \\ Z = 60. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Nous connaissons à priori les coordonnées aériennes de

Digitized by Google

quatre points de la circonférence, savoir, A et B, C et D, extrémités des diamètres parallèle et perpendiculaire au tableau. D'ailleurs, *c* et *d* seront les points culminants de la perspective, puisque les tangentes y seront horizontales; les tangentes en *a* et *b* devront se trouver dirigées vers le centre perspectif (*).

Nous obtiendrons les points latéraux par une construction géométrale fondée sur les considérations théoriques du n° 35. Soit O la projection du point de vue sur le plan du cercle pris pour géométral : nous tirons (**) les tangentes O$\alpha$, O6, dont les contacts $\alpha$ et 6 seront en perspective les points demandés. Nous prenons donc sur l'épure les valeurs numériques de leurs ordonnées X et Z.

Nous prenons pareillement sur l'épure autant de nouveaux points que nous en désirons et les valeurs de leurs ordonnées. Leur distribution est arbitraire, mais il convient qu'ils soient plus nombreux dans les parties où la perspective doit avoir le plus de courbure. Nous supposerons, dans la nécessité de faire un choix, qu'on ait pris les points M et G, N et H, situés sur les cordes distantes du centre de 6 mètres et de 4 mètres vers la gauche et perpendiculaires au tableau. Avec ces points, la construction de la perspective nous en fournira beaucoup d'autres.

Cela posé, nous trouverons :

---

(*) Les quatre points *a*, *b*, *c*, *d* et les directions connues des tangentes, seraient, à la rigueur, des données plus que suffisantes pour la description complète de l'ellipse, comme l'enseigne la Géométrie analytique.

(**) On doit se dispenser de tracer réellement les tangentes, car on n'a besoin que de leurs contacts, lesquels sont les rencontres de la circonférence proposée avec celle que l'on décrit sur OI comme diamètre. Les tangentes sont donc fictives, dans la construction présente et toutes ses analogues.

Digitized by Google

*Résultat géométral.*

$$\alpha \begin{cases} X = 8{,}07^{m} \\ Z = 61{,}05 \end{cases} \quad \beta \begin{cases} X = 23{,}40 \\ Z = 56{,}96 \end{cases} \quad G \begin{cases} X = 10{,}00 \\ Z = 65{,}29 \end{cases}$$

$$M \begin{cases} X = 10{,}00 \\ Z = 54{,}71 \end{cases} \quad H \begin{cases} X = 12{,}00 \\ Z = 66{,}93 \end{cases} \quad N \begin{cases} X = 12{,}00 \\ Z = 53{,}07. \end{cases}$$

D'où, en nous rappelant que, pour tous les points, $Y = -12$ mètres,

*Résultat perspectif.*

$$\alpha \begin{cases} x = 397^{mm} \\ y = -590 \end{cases} \quad \beta \begin{cases} x = 1234 \\ y = -632 \end{cases} \quad a \begin{cases} x = 400 \\ y = -600 \end{cases}$$

$$b \begin{cases} x = 1200 \\ y = -600 \end{cases} \quad c \begin{cases} x = 923 \\ y = -692 \end{cases} \quad d \begin{cases} x = 706 \\ y = -529 \end{cases}$$

$$g \begin{cases} x = 459 \\ y = -551 \end{cases} \quad m \begin{cases} x = 548 \\ y = -658 \end{cases} \quad h \begin{cases} x = 538 \\ y = -538 \end{cases}$$

$$n \begin{cases} x = -678 \\ y = 678. \end{cases}$$

Ces points ayant été construits sur la toile, voici comment nous en obtenons d'autres. Le point $i$, rencontre de $ab$ et $cd$, est la perspective du centre du cercle; et le point $u$, rencontre de $cd$ avec $\alpha\beta$, est le centre de l'ellipse, parce que $cd$ et $\alpha\beta$ sont deux diamètres de cette courbe : ce second point est d'ailleurs situé un peu au-dessous du premier (36). En conséquence, nous obtenons un point $g'$ de l'ellipse, en tirant $mig'$ jusqu'à la rencontre de l'horizontale $gg'$, et pareillement un point $m'$, comme la rencontre de $gim'$ et $mm'$. Nous obtiendrions encore les points $m'$ et $g'$, en observant que les horizontales $mm'$, $gg'$ doivent être coupées en parties égales par le diamètre $cd$, ce qui du moins nous servira de vérification. Ces remarques

Digitized by Google

sont évidentes, par la considération des lignes dans l'espace. Les points $h$ et $n$ détermineront de même les points $h'$ et $n'$; enfin $\alpha$ et $\beta$ pourraient en donner deux analogues, $\alpha'$ et $\beta'$.

Si l'on excepte $\alpha$, $\beta$, $c$ et $d$, chacun des points déjà déterminés peut en fournir un second, situé à l'extrémité opposée d'un diamètre de l'ellipse. Ainsi, par exemple, pour $g$ nous tirerons $gu$, que nous prolongerons d'une longueur égale $ug''$; de sorte que nous aurons obtenu finalement vingt-quatre points de cette courbe.

Il ne reste donc plus qu'à la décrire, en la faisant passer par tous ces points, sachant d'ailleurs que ses éléments doivent avoir des directions verticales en $\alpha$ et $\beta$, horizontales en $c$ et $d$, concourantes vers le centre perspectif en $a$ et $b$. La ligne $cd$ se trouvera dirigée vers ce dernier point.

On a rarement besoin d'un aussi grand nombre de points pour décrire une ellipse avec l'exactitude convenable : on se borne, dans la pratique, à ceux qui ont une influence sensible sur le cours de la courbe. Il nous arrivera souvent de la supposer suffisamment déterminée par ses points latéraux et culminants. Ces quatre points ont été déterminés directement; mais nous pouvions conclure le point $d$ des trois autres, en tirant $cd$ vers le centre perspectif, et de longueur telle que $\alpha\beta$ la divisât en parties égales, ou bien en prenant le point $u$, milieu de $\alpha\beta$ et centre de l'ellipse, tirant la droite $cu$ et la prolongeant d'une longueur égale à elle-même. Le point $b$ pouvait ensuite se conclure du point $a$, puisque $ab$ doit être horizontale et divisée en parties égales par $cd$.

On voit, par ce problème et les précédents, que les principes de la théorie servent, selon le gré de l'opérateur, tantôt à vérifier les résultats obtenus à l'aide des constructions géométrales, tantôt à les suppléer. Ces diverses propriétés, dont nous n'avions fait d'abord qu'un examen théo-

Digitized by Google

rique, et les méthodes spéciales établies pour la pratique, se combinent ainsi et se prêtent un secours mutuel.

UN CERCLE VERTICAL. (*Fig.* 67.)

**121.** *Un cercle d'un rayon de 4 mètres est situé dans un plan vertical dont la déclinaison* = 2 : 1, *de sens tel, qu'il s'éloigne du plan central de gauche à droite. On a pour le centre*

$$I \begin{cases} X = \phantom{-}3^{m}, \\ Y = -\phantom{0}6, \\ Z = \phantom{-}30. \end{cases}$$

*La distance centrale* = $2^{m},4$.

Nous ne connaissons immédiatement de position que les points C et D, extrémités du diamètre vertical : nous devons donc, pour en obtenir d'autres, employer une construction géométrale; elle sera semblable à celle qui a été exposée (112, 3°) pour le cas analogue d'un polygone.

Le plan d'horizon étant pris pour géométral, soit MN la trace du plan du cercle, et ABCD son rabattement. La trace MN n'est donnée par l'énoncé que d'une manière implicite : sa position est déterminée par la condition de passer par le point $I_1$, projection du centre du cercle, et d'avoir la déclinaison ci-dessus. En conséquence, nous faisons $I_1R = 30^{m}$, $RO = 3$, et dans le rabattement $I_1I = 6$.

Du point O', où MN rencontre X'X, nous tirons les tangentes $O'\alpha$, $O'\beta$, dont les contacts $\alpha$, $\beta$ sont, sur le rabattement du cercle, les points correspondants aux points culminants de la perspective (118). Dans le relèvement du cercle, les distances à MN restent constantes; les perpendiculaires $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ à cette droite seront donc les valeurs des ordonnées Y de ces deux points; leurs ordonnées X et Z seront celles des points $\alpha_1$ et $\beta_1$.

Digitized by Google

Les points A et B, extrémités du diamètre parallèle à MN, sont ceux qui correspondent aux points latéraux de la perspective, car les tangentes y sont verticales. Nous prenons donc aussi les valeurs de leurs coordonnées.

Enfin, nous leur ajoutons autant d'autres points de la circonférence que nous le jugeons nécessaire, par exemple, les extrémités G et H de la corde horizontale GH qui divise le rayon IC en deux parties égales.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| $\alpha$ | X = | 3,11 | $\beta$ | X = | 2,49 |
| | Y = | − 2,01 | | Y = | − 9,82 |
| | Z = | 30,21 | | Z = | 28,98 |
| A | X = | 1,21 | B | X = | 4,79 |
| | Y = | − 6,00 | | Y = | − 6,00 |
| | Z = | 26,42 | | Z = | 33,58 |
| G | X = | 1,45 | H | X = | 4,55 |
| | Y = | − 4,00 | | Y = | − 4,00 |
| | Z = | 26,90 | | Z = | 33,10. |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | | | | |
| $\alpha$ | $x =$ | 247 | $\beta$ | $x =$ | 206 | $a$ | $x =$ | 110 |
| | $y =$ | − 159 | | $y =$ | − 813 | | $y =$ | − 545 |
| $b$ | $x =$ | 342 | $c$ | $x =$ | 240 | $d$ | $x =$ | 240 |
| | $y =$ | − 429 | | $y =$ | − 160 | | $y =$ | − 800 |
| $g$ | $x =$ | 129 | $h$ | $x =$ | 330 | | | |
| | $y =$ | − 357 | | $y =$ | − 290. | | | |

Ces valeurs, portées sur la toile, y déterminent, comme dans le problème précédent, le point $i$ correspondant au centre du cercle, et le point $u$ centre de l'ellipse. Des points $g$ et $h$ nous concluons $g'$ et $h'$, en abaissant les verticales $gg'$, $hh'$ jusqu'à la rencontre des lignes $hig'$, $gih'$; $\alpha$ et $\beta$

Digitized by Google

donneraient de même $\alpha'$ et $\beta'$. Chacun des points $d$, $c$, $g$, $h$, $g'$, $h'$ en fournira un second situé à l'extrémité opposée d'un diamètre de l'ellipse : c'est ainsi que le point $g$ détermine $g''$, extrémité du diamètre $gug''$.

Nous décrivons ensuite la courbe, de manière qu'elle passe par tous les points, qu'elle ait des directions verticales en $a$ et $b$, horizontales en $\alpha$ et $\beta$.

Les verticales $cd$, $hh'$, $gg'$ doivent se trouver divisées en parties égales par le diamètre $ab$, puisqu'il en est ainsi des lignes correspondantes de l'espace; nous aurions donc pu construire les points $c$, $h'$, $g'$ d'après cette condition; et le point $b$ lui-même se conclurait des points $a$, $\alpha$, $\beta$, comme l'extrémité d'un diamètre de l'ellipse $aub$.

UN CERCLE INCLINÉ SUR L'HORIZON. (*Fig.* 68.)

122. *Un cercle, d'un rayon de* 3 *mètres, a son centre* I *dans cette position :*

$$\mathrm{I}\begin{cases} X = -\ 2^{m}, \\ Y = \ \ 9, \\ Z = \ 32. \end{cases}$$

*Il est situé dans un plan dont l'inclinaison* = 12 : 5 *et la déclinaison de la trace horizontale* = 4 : 3, *de sens tels, que la trace s'éloigne de gauche à droite, et que le plan est ascendant de droite à gauche.*

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

On donne directement la position du centre I dans l'espace, avec l'inclinaison du plan de la courbe : cela revient au même que de donner d'une manière plus explicite la courbe dans son plan, et la position de ce plan. Du reste, le problème rentre dans le cas général du n° 112.

Le plan d'horizon étant pris pour géométral, soit construit le point $I_1$, projection du centre du cercle. Afin de trouver d'abord la trace de son plan, nous tirons $I_1K$ per-

Digitized by Google

pendiculaire à la direction que doit avoir cette trace; et, parallèlement à cette direction, $I_1I' = 7$ mètres; puis I'K faisant l'angle I'KI égal à l'inclinaison donnée, dans le sens que détermine l'énoncé; enfin, par le point d'intersection K, l'indéfinie NKM ayant la déclinaison donnée et de même sens: ce sera la trace du plan.

Cela fait, nous rabattons le cercle sur le plan géométral, par un mouvement de révolution autour de MN (230). Du point O', rencontre de X'X avec MN, nous tirons les tangentes $O'\alpha$, $O'\beta$, dont les contacts $\alpha$, $\beta$ correspondent aux points culminants.

Pour déterminer les points culminants, nous concevons l'axe des Y, c'est-à-dire une verticale passant en O, prolongé jusqu'à la rencontre du plan du cercle, et nous construisons le point de rencontre, ou son rabattement. Dans ce but, nous abaissons la perpendiculaire OH sur MN; nous tirons ensuite HO'' faisant l'angle OHO'' égal à l'inclinaison du plan, jusqu'à sa rencontre O'' avec une nouvelle droite OO'' perpendiculaire à OH. Le triangle rectangle OHO'' est égal à celui que l'on conçoit formé par la droite HO, la verticale passant en O et la section faite par le plan de ces deux droites dans le plan du cercle : il en représente le rabattement, en supposant qu'il se soit rabattu sur le géométral par un mouvement de révolution autour de OH. Le point O'' est donc, dans cette hypothèse, le rabattement du point cherché. Si maintenant nous supposons le rabattement du plan du cercle autour de sa trace, le même point se rabattra en O''', sur la direction de HO, et à une distance du point H égale à HO''. Ce point O''' étant obtenu, nous tirons au rabattement du cercle les tangentes $O'''\gamma$, $O'''\delta$, dont les contacts $\gamma$, $\delta$ doivent correspondre aux points latéraux.

Nous joignons aux quatre points déterminés sur le rabattement du cercle les extrémités A et B, C et D des dia-

Digitized by Google

mètres parallèle et perpendiculaire à MN ; quelques autres points arbitraires, tels que les extrémités de la corde GH parallèle à la même droite et passant par le milieu du rayon IC, les extrémités d'une autre corde parallèle EF, dont la distance au centre égale les $\frac{4}{5}$ du rayon.

Enfin, nous relevons le plan du cercle comme celui du polygone, dans le problème du n° 115, et nous mesurons les coordonnées aériennes de tous les points considérés sur son rabattement.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| α | X = | — 3,38 | β | X = | — 0,87 |
| | Y = | 9,66 | | Y = | 4,25 |
| | Z = | 32,01 | | Z = | 31,60 |
| γ | X = | — 4,01 | δ | X = | 8,02 |
| | Y = | 8,01 | | Y = | 5,73 |
| | Z = | 30,02 | | Z = | 33,82 |
| A | X = | — 3,8 | B | X = | — 0,2 |
| | Y = | 7,0 | | Y = | 7,0 |
| | Z = | 29,6 | | Z = | 34,4 |
| C | X = | — 2,92 | D | X = | — 1,08 |
| | Y = | 9,77 | | Y = | 4,23 |
| | Z = | 32,69 | | Z = | 31,31 |
| G | X = | — 4,02 | H | X = | — 4,01 |
| | Y = | 8,38 | | Y = | 8,01 |
| | Z = | 34,43 | | Z = | 30,02 |
| E | X = | — 2,30 | F | X = | — 0,18 |
| | Y = | 4,78 | | Y = | 4,78 |
| | Z = | 30,01 | | Z = | 32,89. |

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | mm | | | | |
| $\alpha$ | $x = -211$, $y = 603$ | $\beta$ | $x = -55$, $y = 268$ | $\gamma$ | $x = -267$, $y = 534$ |
| $\delta$ | $x = 1$, $y = 339$ | $a$ | $x = -257$, $y = 473$ | $b$ | $x = -12$, $y = 407$ |
| $c$ | $x = -179$, $y = 598$ | $d$ | $x = -69$, $y = 270$ | $g$ | $x = -265$, $y = 554$ |
| $h$ | $x = -52$, $y = 487$ | $e$ | $x = -153$, $y = 319$ | $f$ | $x = -11$, $y = 291$. |

Le résultat perspectif étant porté sur la toile, nous observons que le point $i$, rencontre de $ab$ et $cd$, est encore celui qui correspond au centre du cercle dans l'espace : ce point ne pourrait plus servir, comme dans les problèmes précédents, à déterminer de nouveaux points de la courbe, par exemple $g'$ et $h'$ au moyen de $g$ et $h$, parce que les directions $gg'$, $hh'$ sont inconnues, à moins que le tableau ne contienne leur point de concours, c'est-à-dire la rencontre de la direction $ab$ avec la ligne d'horizon. Mais les droites $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ se coupent toujours en parties égales en un point $u$, centre de l'ellipse, et par suite chacun des points $a$, $b$, $c$, $d$, $g$, $h$ est susceptible d'en fournir un second situé à l'extrémité opposée d'un diamètre.

Nous décrivons ensuite la courbe, en l'assujettissant à prendre des directions horizontales en $\alpha$ et $\beta$, verticales en $\gamma$ et $\delta$. On voit qu'un très-petit arc de sa circonférence passe à droite de l'axe des $y$, le point latéral $\gamma$ n'en étant distant que d'un millimètre.

UNE VOLUTE. (*Fig.* 69.)

**123.** *Une tige verticale* TA, *de longueur arbitraire, se termine par une volute, composée de huit quarts de cercle qui se raccordent entre eux et avec la tige : le premier* AB *est décrit avec le rayon* A'A = 1 *mètre ; le second*



Digitized by Google

mètres parallèle et perpendiculaire à M
points arbitraires, tels que les extr
parallèle à la même droite et r
rayon IC, les extrémités d'ur
dont la distance au centre ég

Enfin, nous relevons l
polygone, dans le pro
les coordonnées aéri
son rabattement.

*é rayon*
*uant suc-*
*ourbes a sa*
*gauche; la*

.2.

= 1m,8.

est qu'une extension de celui du n° 121, considérions un cercle dans un plan vertical. L'opération, pour le résoudre, sera donc analogue à celle qui a été exposée. Mais nous nous bornerons à prendre, sur la volute, les points A, B, C,..., extrémités des quarts de cercles, et les milieux P, Q, R, S des quatre plus grands. Les points A, C, E,..., où les tangentes sont verticales, correspondent aux points latéraux de la perspective : quant à ceux qui correspondent aux points culminants, nous nous dispensons de les déterminer.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B | X = 2,4 m<br>Y = 5,0<br>Z = 13,8 | C | X = 1,92<br>Y = 4,20<br>Z = 14,44 | D | X = 2,304<br>Y = 3,560<br>Z = 13,928 |
| E | X = 2,611<br>Y = 4,072<br>Z = 13,518 | F | X = 2,365<br>Y = 4,482<br>Z = 13,846 | G | X = 2,169<br>Y = 4,154<br>Z = 14,108 |
| H | X = 2,326<br>Y = 3,892<br>Z = 13,898 | K | X = 2,452<br>Y = 4,101<br>Z = 13,731 | P | X = 2,824<br>Y = 4,707<br>Z = 13,234 |
| Q | X = 2,061<br>Y = 4,766<br>Z = 14,253 | R | X = 2,033<br>Y = 3,747<br>Z = 14,290 | S | X = 2,521<br>Y = 3,710<br>Z = 13,638. |

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

$415^{mm}$ $b \begin{cases} x = 313 \\ y = 652 \end{cases}$ $c \begin{cases} x = 239 \\ y = 524 \end{cases}$

$54$ $e \begin{cases} x = 348 \\ y = 542 \end{cases}$ $f \begin{cases} x = 307 \\ y = 583 \end{cases}$

$n \begin{cases} x = 301 \\ y = 504 \end{cases}$ $k \begin{cases} x = 322 \\ y = 538 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 384 \\ y = 640 \end{cases}$ $q \begin{cases} x = 260 \\ y = 601 \end{cases}$ $r \begin{cases} x = 256 \\ y = 472 \end{cases}$

$s \begin{cases} x = 333 \\ y = 490. \end{cases}$

A l'aide de ces valeurs, portées sur la toile, nous traçons la perspective demandée, en nous rappelant qu'elle doit prendre des directions verticales en $a$, $c$, $e$,... : les tangentes en $b$, $d$, $f$,... devront concourir sur la ligne d'horizon, parce qu'elles représentent des droites horizontales et parallèles dans l'espace.

On peut résoudre le problème en donnant à la volute un plus grand nombre de spires ou d'enroulements, le nombre des spires dont elle est susceptible n'ayant pas de limite. Les volutes employées dans les arts se décrivent généralement par arcs de cercles, comme celle de ce problème ; mais la loi de leur génération n'est pas toujours aussi simple.

## § V.

### MISE EN PERSPECTIVE D'UNE SURFACE POLYÉDRIQUE.

**124.** Nous avons défini (39) les conditions géométriques qui déterminent la portion visible de la surface d'un polyèdre opaque. Dans la pratique, quand on ne reconnaît pas de prime abord si telle face est ou n'est pas visible, on opère



Digitized by Google

comme si elle devait l'être, et l'incertitude cesse bientôt : la face est visible, si sa perspective ne se confond pas avec celle des faces antérieures. D'ailleurs, on doit représenter sur le tableau, indépendamment du périmètre de contour, toutes les arêtes des faces visibles, ainsi que les diverses lignes, droites ou courbes, qui peuvent s'y faire remarquer.

Si chacune des faces visibles d'un polyèdre était donnée individuellement, sa perspective s'obtiendrait comme celle d'un polygone dont on assigne la grandeur et la position, et l'opération se ramènerait à ce qui précède. En général, on ne donne immédiatement, de grandeur et de position, qu'un petit nombre de faces, et l'on suppose connue la loi de la liaison mutuelle de toutes les parties du solide. Dans chaque question proposée, l'opérateur doit chercher, parmi les rapports que ces parties ont entre elles, ceux qui simplifient le plus les constructions de l'épure ou du tableau. A cet égard, il serait difficile d'établir des règles plus précises, mais les exemples y suppléront : on trouvera dans les suivants quelques applications usuelles.

UN PARALLÉLIPIPÈDE AYANT DEUX FACES HORIZONTALES. (*Fig.* 70.)

125. *Un parallélipipède, rectangle et droit, a pour base supérieure un carré horizontal* ABCD *dont le côté égale* 5 *mètres; les arêtes verticales ont* 6 *mètres. La déclinaison de* AB = 3 : 2, *cette droite s'éloignant vers la droite, et le point* A *étant le plus rapproché du plan central :*

$$A \begin{cases} X = -\ 4^{m}, \\ Y = -\ 3, \\ Z = \ \ 27. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 1 *mètre.*

Nous n'avons à déterminer géométralement que les seuls

Digitized by Google

points B, C, D de la base supérieure, les longueurs perspectives des arêtes verticales devant s'obtenir par le calcul (17). La construction sur l'épure se rapporte donc à celle du n° 113. Nous savons d'ailleurs que, pour ces trois points, $Y = -3$.

*Résultat géométral.*

$$B \begin{cases} X = -\ 1^{m},23 \\ Z = \ \ 31,16 \end{cases} \quad C \begin{cases} X = -\ 5,39 \\ Z = -33,93 \end{cases} \quad D \begin{cases} X = -\ 8,16 \\ Z = \ \ 29,77. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

$$a \begin{cases} x = -\ 148^{mm} \\ y = -\ 111 \end{cases} \quad b \begin{cases} x = -\ 39 \\ y = -\ 96 \end{cases}$$

$$c \begin{cases} x = -\ 159 \\ y = -\ \ 88 \end{cases} \quad d \begin{cases} x = -\ 274 \\ y = -\ 101 \end{cases}$$

$$aa' = 222 \qquad bb' = 192 \qquad cc' = 202.$$

Les quatre points $a$, $b$, $c$, $d$ étant construits sur la toile, ainsi que les trois verticales visibles, nous tirons les lignes de jonction $ab$, $a'b'$, $ac$, $a'c'$, . . ., et le problème est résolu.

Le point $c'$ est le seul sommet invisible : on conclurait sa position des lignes obtenues, en abaissant, du point d'intersection des diagonales de la base supérieure, la verticale $ii'$ sur la diagonale $d'b'$, et tirant $a'i'c'$ jusqu'à la rencontre de la verticale abaissée du point $c$.

Si l'opération est exacte, il faut que les arêtes du solide qui sont horizontales et parallèles dans l'espace, aient sur le tableau des directions concourantes sur la ligne d'horizon.

UN PARALLÉLIPIPÈDE INCLINÉ SUR L'HORIZON. (*Fig.* 71.)

126. *Un parallélipipède droit a pour base un rectangle* ABCD *dans lequel* AD = 2 *mètres et* AB = $3^{m},8$. *Le côté* AB *est horizontal et le plus bas du rectangle; sa décli-*

Digitized by Google

*naison* = 4 : 3, *et l'inclinaison du plan de la base* = 2 : 5, AB *s'éloignant vers la gauche de* B *en* A, *et le plan étant ascendant de gauche à droite. Les arêtes perpendiculaires à la base ont* 10 *mètres de longueur et s'étendent vers la gauche :*

$$A \begin{cases} X = & 11^{m}, \\ Y = - & 6, \\ Z = & 40. \end{cases}$$

*La distance centrale* = $2^{m},4$.

Nous déterminerons les coordonnées des points B, C, D de la base inférieure, par une construction qui se rapporte au cas général des polygones (112). Le plan vertical de projection que nous emploierons à cet effet nous servira également à obtenir les sommets de la base supérieure, parce qu'il sera parallèle aux arêtes longitudinales; cette seconde partie de l'opération rentre dans le problème de la perpendiculaire à un plan. (*Géom. descrip.*, n° 234.)

En conséquence, le plan d'horizon étant pris pour géométral, soit construit d'abord $A_1$, projection horizontale du point A. La direction de la trace du plan de la base inférieure, l'inclinaison de ce plan et la position du point A sont connues : avec ces éléments nous construisons, comme au n° 115, cette trace MN. Nous prenons une ligne de terre PQ perpendiculaire à MN; nous construisons la trace KL du plan de la base dans le plan vertical de projection que détermine cette ligne de terre, et, par un rabattement et un relèvement successifs du plan de la base, les projections horizontale et verticale des sommets du rectangle.

Maintenant, tirons deux droites A'E', D'H', perpendiculaires à LQ et longues de 10 mètres : ce seront les projections verticales des arêtes perpendiculaires au plan de la base, chacune d'elles correspondant à deux de ces dernières droites. Leurs extrémités E', H' déterminent les points

Digitized by Google

$E_1$, $F_1$, $G_1$, $H_1$, extrémités des projections horizontales des mêmes arêtes, et par conséquent projections horizontales des quatre sommets de la base supérieure.

Il serait sans doute superflu d'indiquer quelles sont les grandeurs métriques à prendre sur l'épure; nous remarquerons seulement que pour le point C, l'ordonnée Y égale D'S', et que la position du point D' au-dessous de la ligne de terre indique que le point dans l'espace est au-dessous du plan d'horizon: le point D, ne pouvant être visible, sera négligé. Les sommets de l'autre base sont au-dessus du plan d'horizon, et la construction de la perspective nous apprendra s'ils sont tous visibles.

*Résultat géométral.*

$$B\begin{cases} X = 13{,}28^{m} \\ Y = -\ 6{,}00 \\ Z = 36{,}96 \end{cases} \qquad C\begin{cases} X = 14{,}77 \\ Y = -\ 5{,}26 \\ Z = 38{,}07 \end{cases}$$

$$E\begin{cases} X = 8{,}03 \\ Y = 3{,}28 \\ Z = 37{,}77 \end{cases} \qquad F\begin{cases} X = 10{,}31 \\ Y = 3{,}28 \\ Z = 34{,}73 \end{cases}$$

$$G\begin{cases} X = 11{,}79 \\ Y = 4{,}03 \\ Z = 35{,}85 \end{cases} \qquad H\begin{cases} X = 9{,}51 \\ Y = 4{,}03 \\ Z = 38{,}89. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

$$a\begin{cases} x = 660^{mm} \\ y = -360 \end{cases} \quad b\begin{cases} x = 862 \\ y = -390 \end{cases} \quad c\begin{cases} x = 931 \\ y = -332 \end{cases}$$

$$e\begin{cases} x = 510 \\ y = 208 \end{cases} \quad f\begin{cases} x = 713 \\ y = 227 \end{cases} \quad g\begin{cases} x = 789 \\ y = 270 \end{cases}$$

$$h\begin{cases} x = 587 \\ y = 249. \end{cases}$$

Ces points étant obtenus sur le tableau, nous tirons des

Digitized by Google

lignes de jonction, et la perspective demandée en résulte. Nous remarquons que la base supérieure est visible, ce qu'il nous eût été difficile de reconnaître de prime abord. Chaque groupe de lignes parallèles dans l'espace doit satisfaire à la condition des points de concours.

UN ÉDIFICE. (*Fig.* 72.)

127. *Un édifice étant réduit à sa forme polyédrique la plus simple, on en donne ainsi le devis : la façade a* 70 *mètres de long sur* 30 *de haut; elle est parallèle au plan normal, et située à* 45 *mètres de ce plan, vers la droite : la face parallèle au tableau a* 18 *mètres de large, et sa distance au plan central est* 240 *mètres; la base est à* 15 *mètres au-dessous du plan d'horizon : la crête du toit est à* 38 *mètres au-dessus du sol, et sa longueur est seulement de* 52 *mètres, parce que la toiture est à quatre versants, d'ailleurs symétriques* (*).

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Les coordonnées aériennes des points principaux de l'édifice proposé se concluent immédiatement de sa disposition à l'égard des plans coordonnés, et des dimensions attribuées à ses diverses parties ; nous sommes ainsi dispensé de toute construction géométrale. Nous reconnaissons d'ailleurs quelles sont les faces visibles, et nous trouvons par le calcul des coordonnées perspectives :

---

(*) Dans cet édifice et ceux dont il s'agit plus loin, nous négligeons le débordement du toit sur la façade, les saillies des corniches et tous autres détails que ne mentionne pas expressément l'énoncé. Si l'on voulait y distribuer des fenêtres symétriquement, on y parviendrait par les divisions perspectives de certains côtés en parties proportionnelles. Pour les détails de cette nature, voyez plus loin le chapitre des simplifications dans les opérations de la pratique.

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

$$a \begin{cases} x = 562^{mm} \\ y = -187 \end{cases} \qquad ab = 225 \quad am = bn = 375$$

$$g \begin{cases} x = 538 \\ y = 229 \end{cases} \qquad h \begin{cases} x = 651 \\ y = 277 \end{cases} \qquad d \begin{cases} x = 435 \\ y = -145. \end{cases}$$

Nous portons ce résultat sur la toile, où nous déterminons le point *k* comme la rencontre de la verticale *dk* avec la fuyante *m*V, et nous achevons la perspective par les lignes de jonction *gk*, *hm*, *hn*, *mn*.

Les directions *ad*, *hg* doivent, aussi bien que *mk*, passer par le centre perspectif.

UN PAVILLON AVEC FENÊTRES DE MANSARDES. (*Fig.* 73.)

128. *Un édifice, en forme de pavillon, a l'une de ses faces parallèle au tableau; sa base est un carré, situé à* $9^m,2$ *au-dessous du plan d'horizon et dont le côté égale* $4^m,8$. *On donne pour le point* A, *le sommet de cette base le plus voisin du tableau et du plan normal:*

$$A \begin{cases} X = -4^m, \\ Z = 20. \end{cases}$$

*La hauteur des murs égale* $5^m,4$. *La toiture est une pyramide haute de* $3^m,6$. *Sur chaque versant on remarque une fenêtre, dont la face d'ouverture est un rectangle surmonté d'un triangle; la hauteur du rectangle est* $1^m,3$ *et sa base* $1^m,2$; *la hauteur du triangle est* $0^m,6$; *la base du rectangle est élevée de* $0^m,8$ *au-dessus du plan de la base de la pyramide. Le toit de chaque fenêtre résulte de cette disposition, parce qu'on néglige toutes les épaisseurs. Il y a parfaite symétrie dans l'édifice.*

*La distance centrale* $= 2^m,5$.

Digitized by Google

Les fenêtres sont les seules parties de l'édifice qui puissent exiger une construction géométrale, les coordonnées des points principaux, dans les autres parties, résultant immédiatement des données du problème. Considérons la fenêtre qui fait face au tableau : elle sera déterminée de position, dès que nous aurons les points G, M et N ; nous obtiendrons le premier, comme l'intersection du plan incliné du toit avec une verticale, et les deux autres, comme celles du même plan avec deux horizontales. D'ailleurs, les ordonnées X de ces points sont données implicitement par l'énoncé ; et pour obtenir leurs ordonnées Z et Y, il nous suffira d'opérer sur un triangle rectangle, celui que l'on construirait pour mesurer l'inclinaison du toit sur l'horizon.

En conséquence, soit construit le triangle rectangle $SRS_1$, tel que $S_1S = 3^m,6$ et $S_1R = 2^m,4$ dans une échelle de réduction quelconque. Parallèlement à $SS_1$ menons $GG_1 = 0^m,8$ ; sur le prolongement de cette dernière ligne, prenons $GI = 1^m,3$ et $IK = 0^m,6$ ; tirons les rectangulaires IN et KM, $NN_1$ et $MM_1$ : nous obtenons ainsi les valeurs demandées, ou des lignes qui les déterminent. En effet, les longueurs $GG_1$, $MM_1$, $NN_1$ sont les élévations des points G, M, N, au-dessus du plan de la base de la pyramide, et $RG_1$, $RM_1$, $RN_1$ sont leurs distances au plan de la face antérieure du pavillon : nous connaissons ainsi les quantités dont il faut augmenter les ordonnées Y et Z du point A pour avoir celles de ces trois points (*).

Il est évident que le résultat de cette construction peut

(*) Dans cet exemple et quelques autres, on peut remplacer l'opération géométrique par un calcul de proportion, ce qui serait infiniment plus simple et préférable pour la pratique. Mais je ne puis m'écarter de la méthode générale que j'ai adoptée, consistant à effectuer géométriquement les opérations qui précèdent la mise en perspective, sauf le cas où elles se réduisent à des additions ou des soustractions.

Digitized by Google

servir pour les fenêtres latérales, par la seule permutation des X avec les Z. Nous indiquerons cette analogie, en employant à leur égard les mêmes lettres que ci-dessus, mais accentuées.

*Résultat géométral.*

$$G \begin{cases} X = -\ 5{,}8^{m} \\ Y = -\ 3{,}0 \\ Z = \ \ 20{,}533 \end{cases} \qquad K \begin{cases} X = -\ 6{,}4 \\ Y = -\ 1{,}1 \\ Z = \ \ 20{,}533 \end{cases}$$

$$M \begin{cases} X = -\ 6{,}4 \\ Y = -\ 1{,}1 \\ Z = \ \ 21{,}8 \end{cases} \qquad N \begin{cases} X = -\ 5{,}8 \\ Y = -\ 1{,}7 \\ Z = \ \ 21{,}4 \end{cases}$$

$$G' \begin{cases} X = -\ 4{,}533 \\ Y = -\ 3{,}0 \\ Z = \ \ 21{,}8 \end{cases} \text{etc.}$$

*Résultat perspectif.*

$$a \begin{cases} x = -\ 500^{mm} \\ y = -1150 \end{cases} \quad \begin{matrix} ab = 600 \\ ac = 675 \end{matrix} \qquad e \begin{cases} x = -403 \\ y = -926 \end{cases} \quad ef = 545$$

$$s \begin{cases} x = -714 \\ y = -\ 22 \end{cases} \qquad g \begin{cases} x = -706 \\ y = -365 \end{cases} \quad \begin{matrix} gh = 146 \\ gi = 158 \end{matrix}$$

$$k \begin{cases} x = -780 \\ y = -134 \end{cases} \qquad m \begin{cases} x = -734 \\ y = -126 \end{cases} \qquad n \begin{cases} x = -677 \\ y = -195 \end{cases}$$

$$g' \begin{cases} x = -520 \\ y = -344 \end{cases} \quad g'i' = 149 \qquad h' \begin{cases} x = -493 \\ y = -326 \end{cases}$$

$$k' \begin{cases} x = -506 \\ y = -123 \end{cases} \qquad m' \begin{cases} x = -647 \\ y = -123 \end{cases} \qquad n' \begin{cases} x = -619 \\ y = -195 \end{cases}$$

$$i'' \begin{cases} x = -948 \\ y = -195. \end{cases}$$

Nous construisons sur la toile ces points et ces lignes verticales ou horizontales, et nous achevons sans difficulté la

Digitized by Google

perspective de l'édifice, en tirant les lignes qui les joignent respectivement. Observons seulement que, pour avoir le point $k''$ dont nous n'avons pas calculé les coordonnées, nous tirons l'horizontale $kk''$ de longueur telle, qu'elle soit coupée en parties égales par la verticale $sp$ abaissée du point $s$. Ce point $k''$ détermine avec $i''$ les deux portions de lignes visibles sur la fenêtre située à gauche.

Entre autres moyens de vérification, nous remarquerons celui-ci : du point $p$, rencontre de la verticale $sp$ avec la diagonale $bc$, soit menée l'horizontale $pq$; tirons la verticale $qt$ et la droite $ts$ : il faut que cette dernière droite passe par le point $m'$; et le point où elle rencontre $g'h'$ doit se trouver situé verticalement au-dessous de $k'$. Si par ce point on mène une horizontale et qu'on répète l'opération vers la gauche, on obtient un point d'intersection qui doit se trouver pareillement en direction verticale avec $k''$. La raison en devient manifeste par la considération des lignes correspondantes de l'espace.

Par des constructions analogues, et à l'aide du concours de certaines directions au centre perspectif, il serait facile d'achever la perspective complète de l'édifice dans sa partie invisible, sans en excepter les fenêtres.

UN ÉDIFICE SURMONTÉ D'UN PAVILLON. (*Fig.* 74.)

129. *La façade d'un édifice symétrique est haute de* 20 *mètres et longue de* 40 *mètres; sa base est à* 15 *mètres au-dessous du plan d'horizon; elle décline de* 45 *degrés, s'éloignant de gauche à droite. Pour son sommet le plus rapproché, on donne:*

$$A \left\{ \begin{array}{l} X = -13^{m}, \\ Z = \phantom{-}70. \end{array} \right.$$

*L'épaisseur de l'édifice est de* 18 *mètres. La toiture n'a*

Digitized by Google

*que deux versants, et sa crête est à 25 mètres au-dessus du sol: elle est traversée au centre par un pavillon carré, dont les faces ont 12 mètres de large et s'élèvent à la hauteur de 3 mètres au-dessus de la crête; le pavillon se termine par une pyramide ayant* $6^m,4$ *de hauteur.*

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Si l'on excepte les points E, F, où les arêtes verticales du pavillon rencontrent le toit, les ordonnées Y des points principaux de l'édifice se concluent immédiatement des conditions de l'énoncé. Pour déterminer leurs ordonnées X et Z, nous construisons géométralement le rectangle ABCD, base de l'édifice ou projection de cette base sur un plan horizontal quelconque; le carré concentrique $E_1F_1G_1H_1$, projection de la base du pavillon; les points $M_1$, $N_1$, $P_1$, projections des extrémités de la crête et du point où elle rencontre l'une des faces visibles du pavillon; et nous prenons les valeurs des ordonnées géométrales de ces divers points.

Nous obtenons ensuite l'élévation verticale du point E, en considérant le plan géométral comme celui de la base de la toiture, et faisant l'angle $H_1E_1KR$ égal à l'inclinaison du toit : pour construire cet angle, il suffit de prendre, sur l'échelle de l'épure, $P_1R = 5$ mètres, et de tirer RK. La longueur $E_1E_2$ interceptée par cet angle mesure l'élévation du point E au-dessus du plan de la base de la toiture, et par suite détermine l'ordonnée Y de ce point; car il est évident que le triangle $P_1KR$ représente le rabattement d'une section faite par un plan perpendiculaire à MN. Celle du point F a la même valeur.

Digitized by Google

*Résultat géométral.*

$$B\begin{cases} X = \overset{m}{15,28} \\ Y = -15,00 \\ Z = 98,28 \end{cases} \quad D\begin{cases} X = -25,73 \\ Y = -15,00 \\ Z = 82,73 \end{cases}$$

$$M\begin{cases} X = -19,36 \\ Y = 10,00 \\ Z = 76,36 \end{cases} \quad N\begin{cases} X = 8,92 \\ Y = 10,00 \\ Z = 104,65 \end{cases}$$

$$E\begin{cases} X = -5,22 \\ Y = 6,67 \\ Z = 82,02 \end{cases} \quad F\begin{cases} X = 3,22 \\ Y = 6,67 \\ Z = 90,51 \end{cases}$$

$$I\begin{cases} X = -5,22 \\ Y = 19,40 \\ Z = 90,51 \end{cases} \quad P\begin{cases} X = -9,46 \\ Y = 10,00 \\ Z = 86,26. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

$$a\begin{cases} x = \overset{mm}{-571} \\ y = -643 \end{cases} \quad b\begin{cases} x = 466 \\ y = -458 \end{cases} \quad d\begin{cases} x = -933 \\ y = -544 \end{cases}$$

$$aa' = 857 \quad dd' = 725 \quad m\begin{cases} x = -761 \\ y = 393 \end{cases}$$
$$bb' = 610$$

$$n\begin{cases} x = 256 \\ y = 287 \end{cases} \quad e\begin{cases} x = -191 \\ y = 244 \end{cases} \quad f\begin{cases} x = 107 \\ y = 224 \end{cases}$$

$$ee' = 232 \quad i\begin{cases} x = -173 \\ y = 643 \end{cases} \quad p\begin{cases} x = -329 \\ y = 348 \end{cases}$$
$$ff' = 210$$

Avec ces valeurs portées sur la toile et quelques lignes de jonction, nous construisons la perspective de l'édifice. Toutefois, le point $h'$, l'un des sommets visibles de la pyramide, n'a pas été déterminé directement ; mais nous l'obtenons sur la toile, en tirant l'horizontale $f'h'$ de longueur telle, qu'elle soit divisée en parties égales par la verticale abaissée du point $i$; la raison en est que, les faces du

Digitized by Google

pavillon dans l'espace déclinant de 45 degrés, la diagonale F′H′ se trouve parallèle au tableau.

Les lignes horizontales de l'espace qui ont cette déclinaison doivent avoir leurs perspectives dirigées vers l'un ou l'autre des points de distance; ces points sont situés à 3 mètres du centre de perspective, mais probablement en dehors des limites du tableau.

On ferait dépendre de cette construction celle de la partie invisible du corps de l'édifice ou de son pavillon, au moyen de diagonales ou de verticales menées par quelques-uns de ses sommets, d'ailleurs sans faire usage des points de distance.

UNE TOUR OCTOGONALE TRAVERSANT UN TOIT. (*Fig.* 75.)

130. *La crête* MN *d'un toit, longue de* 50 *mètres, est située à* 20 *mètres au-dessous du plan d'horizon. Sa déclinaison* = 5 : 12, *dans un sens qui l'éloigne de droite à gauche. On donne pour son extrémité la plus voisine :*

$$M \begin{cases} X = 9^{m}, \\ Z = 85. \end{cases}$$

*L'inclinaison du toit* = 3 : 7. *Au centre on remarque une tour octogonale dont les murs, larges de* 10 *mètres, s'élèvent jusqu'à la hauteur de* 11 *mètres au-dessus de la crête; deux faces sont parallèles à cette droite : elle est surmontée d'une pyramide d'une hauteur de* 16 *mètres. Le reste de l'édifice est arbitraire.*

*La distance centrale* = $3^{m},2$.

Ce problème diffère des précédents en ce qu'il peut y avoir incertitude sur le nombre des faces visibles de l'édifice; cependant il est facile de reconnaître, avec un peu d'attention sur la position du prisme octogonal, qu'il a quatre faces visibles, ainsi que nous le vérifierons en con-

Digitized by Google

struisant sa perspective : les faces visibles de la pyramide ne seront pas plus nombreuses. D'ailleurs, l'opération de l'épure se compose encore de deux parties distinctes : la première aura pour objet la détermination des ordonnées X et Z de tous les points principaux ; la seconde nous donnera les élévations verticales des points A′, B′, C′,..., intersections des arêtes verticales avec le toit visible, ou les distances de ces points au plan de la base de la pyramide, les ordonnées Y ayant des valeurs connues pour tous les autres points. Elles sont l'une et l'autre analogues à beaucoup de constructions déjà exécutées.

Ainsi, prenant pour plan géométral celui qui passe par la crête du toit, nous y construisons le point M donné, la droite MN = 50 mètres, de manière qu'elle ait la déclinaison donnée ; enfin l'octogone régulier $A_1B_1C_1$,..., dont le centre est en $I_1$, milieu de MN, et dont les côtés ont la grandeur et la direction attribuées aux côtés de la base de la tour : il représente cette base, ou sa projection. Nous mesurons ensuite les ordonnées géométrales.

Pour la seconde partie de l'opération, nous employons un plan vertical de projection perpendiculaire à MN. Soit PQ la ligne de terre : construisons QH, trace verticale du plan du toit, de sorte que l'angle PQH égale l'inclinaison donnée ; et abaissons des points $A_1$, $B_1$, des perpendiculaires à PQ : les portions RS, TU de ces droites mesurent l'abaissement, au-dessous du plan géométral, des points où les arêtes qui passent en A et B rencontrent le toit ; connaissant la distance de ce plan au plan d'horizon, nous pouvons en conclure les coordonnées Y de ces points, ou bien leurs distances AA′, BB′, aux points A, B, ce qui est aussi commode pour le calcul, et ce que suppose le résultat ci-après. Il est clair que les mêmes valeurs conviendront aux arêtes DD′, CC′.

Digitized by Google

*Résultat géométral.*

$$A\begin{cases} X = -\ 27{,}14^{m} \\ Y = -\ 9{,}00 \\ Z = \ 94{,}64 \end{cases} \qquad B\begin{cases} X = -23{,}33 \\ Y = -\ 9{,}00 \\ Z = \ 85{,}40 \end{cases}$$

$$C\begin{cases} X = -\ 14{,}10 \\ Y = -\ 9{,}00 \\ Z = \ 81{,}55 \end{cases} \qquad D\begin{cases} X = -\ 4{,}85 \\ Y = -\ 9{,}00 \\ Z = \ 85{,}36 \end{cases}$$

$$E\begin{cases} X = -\ 1{,}01 \\ Y = -\ 9{,}00 \\ Z = \ 94{,}59 \end{cases} \qquad G\begin{cases} X = -\ 2{,}93 \\ Y = -20{,}00 \\ Z = \ 89{,}97 \end{cases}$$

$$N\begin{cases} X = -\ 37{,}15 \\ Y = -\ 20{,}00 \\ Z = \ 104{,}23 \end{cases} \qquad I\begin{cases} X = -14{,}08 \\ Y = \ 7{,}00 \\ Z = \ 94{,}62 \end{cases}$$

$AA' = 13{,}14 \qquad CC' = 16{,}17$
$BB' = 16{,}17 \qquad DD' = 13{,}14.$

*Résultat perspectif.*

$$m\begin{cases} x = \ 339^{m} \\ y = -753 \end{cases} \qquad a\begin{cases} x = -918 \\ y = -304 \end{cases} \qquad b\begin{cases} x = -874 \\ y = -337 \end{cases}$$

$$c\begin{cases} x = -553 \\ y = -353 \end{cases} \qquad d\begin{cases} x = -182 \\ y = -337 \end{cases}$$

$$e\begin{cases} x = -\ 34 \\ y = -304 \end{cases} \qquad \begin{matrix} aa' = 444 \\ bb' = 606 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} cc' = 634 \\ dd' = 492 \end{matrix}$$

$$i\begin{cases} x = -476 \\ y = \ 237 \end{cases} \qquad g\begin{cases} x = -104 \\ y = -711. \end{cases}$$

La construction de la perspective, à l'aide de ces valeurs, est facile et ne donne lieu à aucune nouvelle remarque.



Digitized by Google

UN ESCALIER CONDUISANT A UNE TERRASSE. (*Fig.* 76.)

131. *Un escalier se compose de* 20 *marches de mêmes dimensions: leur hauteur* AA′ *égale* $0^m,15$; *leur longueur* AB, *ou* l'emmarchement, 5 *mètres; et leur largeur* A′I, *ou le* giron, $0^m,39$. *Les* limons, *ou les murs verticaux qui enclavent l'escalier, ont* $0^m,5$ *d'épaisseur. Les surfaces inclinées de ces murs se terminent inférieurement par deux rectangles horizontaux, dont la largeur* B″G *est d'aplomb sur la marche inférieure et l'élévation* NN′ *au-dessus du sol égale à* 1 *mètre; elles aboutissent dans leurs parties supérieures aux murs d'une terrasse qui s'alignent avec la marche supérieure et s'élèvent pour former un parapet haut de* $0^m,7$ *et large de* $0^m,5$. *La déclinaison des limons* $= 5 : 2$, *et ils s'éloignent de gauche à droite.*

$$A \begin{cases} X = -10^m \\ Y = -10 \\ Z = 30. \end{cases}$$

*La distance centrale* $= 2^m,5$.

Nous pourrions nous proposer de déterminer les arêtes des marches au moyen des coordonnées de leurs points principaux : ces points se succèdent sur les lignes A′C, AC′, B′D, BD′, à des intervalles égaux, et leurs coordonnées se déduiraient d'ailleurs, par un calcul facile, de celles des extrémités de ces dernières lignes. Cette manière d'opérer, moins longue qu'elle ne le paraît d'abord, est peut-être celle que le praticien doit préférer, quand il veut atteindre sur la toile une grande précision. Mais la méthode des divisions perspectives (111) fournit un procédé si simple en théorie, et dont l'application semble si naturelle dans le cas proposé, que nous ne pouvons nous dispenser de l'employer. En conséquence, nous n'aurons à construire direc-

Digitized by Google

tement que les points principaux des deux marches supérieure et inférieure, et ceux des deux limons.

Or, les hauteurs verticales de tous ces points sont données immédiatement; il est évident, en effet, que l'élévation de CD au-dessus de la base de l'escalier égale 20 fois la hauteur d'une marche, ou 3 mètres, et celle du parapet, $3^m,7$. Les valeurs des ordonnées Y s'ensuivent.

Une projection géométrale, comme celle que représente la figure, nous donnera les valeurs des ordonnées X et Z des mêmes points : cette projection se construit sans difficulté, en partant du point donné A et ayant égard aux longueurs et aux déclinaisons des lignes de l'espace. Pour l'application de la méthode ci-dessus indiquée, nous devrons mettre en perspective les lignes AC″ et BD″ elles-mêmes.

Le résultat géométral ci-après ne comprend que d'une manière implicite quelques-uns des points de l'espace, parce que leurs coordonnées aériennes se concluent facilement de celles dont les valeurs sont explicites. Ainsi, par exemple, on calculerait les coordonnées du point N, en observant qu'entre B et N, les différences respectives des X et des Z sont les mêmes qu'entre A et M (*).

---

(*) Dans tous les problèmes suivants, les résultats géométraux seront pareillement simplifiés. Les points qui en seront exclus se rattacheront à quelques autres par des considérations de symétrie ou des similitudes de positions, et le calcul de leurs coordonnées se réduira à des additions ou soustractions arithmétiques. Le praticien est libre de suivre ainsi la voie du calcul pour ces points secondaires, ou de prendre directement toutes les valeurs sur l'épure.



Digitized by Google

*Résultat géométral.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| B | X = — 5,36 (m) | C | X = — 7,22 |
| | Z = 28,14 | | Z = 36,88 |
| M | X = — 10,46 | E | X = — 10,32 |
| | Z = 30,19 | | Z = — 30,55 |
| T | X = — 7,03 | | |
| | Z = 37,34. | | |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $x = -833$ (mm) | $b$ | $x = -476$ | $c$ | $x = -490$ |
| | $y = -833$ | | $y = -888$ | | $y = -474$ |
| $d$ | $x = -186$ | $m$ | $x = -866$ | $n$ | $x = -437$ |
| | $y = -500$ | | $y = -828$ | | $y = -894$ |
| $e$ | $x = -845$ | $h$ | $x = -419$ | $f$ | $x = -812$ |
| | $y = -736$ | | $y = -795$ | | $y = -741$ |
| $g$ | $x = -457$ | $p$ | $x = -471$ | $r$ | $x = -518$ |
| | $y = -789$ | | $y = -422$ | | $y = -425$ |
| $t$ | $x = -170$ | $s$ | $x = -154$ | | |
| | $y = -444$ | | $y = -452$ | | |

$aa' = 12$ $cc' = 10$ $cc'' = 204$ $mm' = 83$ $cq = 47$
$bb' = 13$ $dd' = 11$ $dd'' = 214$ $nn' = 90$ $du = 50$.

Ce résultat étant porté sur la toile, nous complétons par des lignes de jonction la perspective des deux limons de l'escalier, et nous traçons celle du mur de la terrasse au moyen des alignements $tp$, $uq$, $d''c''$. La verticale $ss'$, abaissée jusqu'à la rencontre de $d''c''$, détermine le point $s'$.

Pour construire les marches, nous tirons les lignes auxiliaires $ac'$, $a'c$, $bd'$, $b'd$ : ces lignes représentent celles que l'on conçoit passant, dans l'espace, par les sommets des

Digitized by Google

angles rentrants et les sommets des angles saillants des marches, à la surface interne des limons. Nous les divisons perspectivement en 19 parties égales (111), et joignons correspondamment les points de division par des droites qui représentent les arêtes rentrantes ou saillantes limitant les faces verticales et horizontales. Cette division perspective se ramène à celle des projections horizontales $ac''$, $bd''$. Les verticales élevées par les points de division de ces dernières droites divisent à la fois les lignes $ac'$, $a'c$ d'une part, et $bd'$, $b'd$ d'une autre part. La figure contient le détail de l'opération.

Les droites parallèles à BD'', dans l'espace, ont leur point accidentel à la distance 1 mètre du centre perspectif (110). Les petites droites analogues à $a'i$ devront donc se trouver dirigées vers ce point. Le point $i$, résultant de la construction précédente, se trouvera situé verticalement au-dessous du point $f$.

UN ESCALIER EN TERRE-PLEIN. (*Fig.* 77.)

132. *La base de cet escalier est un carré* ABCD, *ayant* 8 *mètres de côté; il y a* 8 *marches larges de* $0^m,36$ *sur* $0^m,15$ *de hauteur. La déclinaison de* AB = 2 : 1, *l'éloignement ayant lieu de gauche à droite. On donne pour le point* A, *le plus voisin du plan central:*

$$A \begin{cases} X = -\ 6^m, \\ Y = -\ 7, \\ Z = \ \ 30. \end{cases}$$

*La distance centrale* $= 2^m,1$.

Nous adoptons, pour la mise en perspective des marches, le même mode d'opération que dans le problème précédent: la construction géométrale se réduit en conséquence à celle de la base ABCD de l'escalier et de la

Digitized by Google

projection $E_1F_1G_1H_1$ de la terrasse qui le surmonte. Cette projection est un carré déterminé par la condition que les distances de ses côtés aux côtés de la base soient égales à sept girons, ou $2^m,52$. L'élévation de la terrasse au-dessus de la base est la somme des hauteurs des marches, ou $1^m,2$, d'où résulte la valeur de Y pour ses quatre sommets.

*Résultat géométral.*

$$B \begin{cases} X = -\ 2^m,42 \\ Z = \ \ 37,15 \end{cases} \quad D \begin{cases} X = -\ 13,15 \\ Z = \ \ 33,58 \end{cases}$$

$$E \begin{cases} X = -\ 7,13 \\ Z = \ \ 33,38 \end{cases} \quad F \begin{cases} X = -\ 5,80 \\ Z = \ \ 36,03 \end{cases}$$

$$H \begin{cases} X = -\ 9,77 \\ Z = \ \ 34,70. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

$$a \begin{cases} x = -\ 420^{mm} \\ y = -\ 490 \end{cases} \quad b \begin{cases} x = -\ 137 \\ y = -\ 396 \end{cases} \quad c \begin{cases} x = -\ 498 \\ y = -\ 361 \end{cases}$$

$$d \begin{cases} x = -\ 802 \\ y = -\ 428 \end{cases} \quad e \begin{cases} x = -\ 449 \\ y = -\ 365 \end{cases} \quad f \begin{cases} x = -\ 338 \\ y = -\ 338 \end{cases}$$

$$g \begin{cases} x = -\ 476 \\ y = -\ 326 \end{cases} \quad h \begin{cases} x = -\ 591 \\ y = -\ 351 \end{cases}$$

$$aa' = 11 \quad dd' = 9 \quad ff' = 8$$
$$bb' = 8 \quad ee' = 9 \quad hh' = 9.$$

Ayant porté sur la toile le résultat perspectif et construit la perspective de la base et de la terrasse, nous tirons les lignes auxiliaires $ae'$, $a'e$, $bf'$, $b'f$, $dh'$, $d'h$. Nous divisons perspectivement ces lignes en 7 parties égales, et nous joignons correspondamment les points de division. Nous obtenons ainsi les faces totalement visibles, en avant et vers la droite.

Vers les deux autres côtés, les marches ne sont visibles

Digitized by Google

qu'à leurs extrémités. Pour les construire avec rigueur, nous devrions diviser les nouvelles lignes auxiliaires $cg'$, $c'g$, comme les précédentes; mais il est facile de tracer les petites portions de lignes visibles sans nouvelles constructions, de manière qu'elles satisfassent sensiblement à la propriété des points de concours. Le procédé géométrique semblerait d'ailleurs difficilement praticable, en raison du peu d'étendue des deux lignes à diviser.

Si l'une des directions $ab$, $ad$ avait son point accidentel dans les limites du tableau, il serait avantageux de s'en servir pour la détermination des lignes parallèles, dans l'espace, à cette direction. On éviterait ainsi une des divisions perspectives. Le point accidentel de la première est à $1^m,05$ du centre perspectif, c'est-à-dire à la moitié de la distance centrale, d'après la déclinaison attribuée à AB.

UN PONT A PILES DROITES. (*Fig.* 78.)

133. *Le tablier d'un pont, à sa surface supérieure, est un rectangle* ABCD *long de* 40 *mètres, large de* 15 *mètres, et situé à* 25 *mètres au-dessous du plan d'horizon. On donne pour le sommet de ce rectangle le plus voisin du plan central :*

$$A \begin{cases} X = -\ 16^m, \\ Z = \ \ 130. \end{cases}$$

*La déclinaison de* AD *ou de* BC = 1 : 3, *l'éloignement ayant lieu de gauche à droite. L'épaisseur du pont égale* 2 *mètres; la hauteur du parapet, ainsi que son épaisseur, est de* $0^m,8$, *cette épaisseur n'étant pas comprise dans la largeur du tablier. Le niveau de l'eau est à* 8 *mètres au-dessous de la surface supérieure du tablier. Il y a deux piles qui divisent la longueur du pont en trois parties égales: leur épaisseur égale* 2 *mètres; dans chaque pile*

Digitized by Google

*on remarque une saillie ou avant-bec, formant un angle de 60 degrés, dont l'arête vive, telle que* PP', *ne s'élève qu'à la hauteur de* $4^m,5$ *au-dessus de l'eau. Les quais adjacents s'étendent indéfiniment, suivant des directions perpendiculaires au pont.*

L'énoncé du problème nous donne immédiatement les ordonnées Y de tous les points à considérer dans l'espace; en conséquence, l'opération géométrale, que l'on comprendra facilement sans figure, se réduit à construire une projection horizontale du système proposé. Nous ferons usage, pour la construction de la perspective, du point accidentel des lignes perpendiculaires au pont, de sorte qu'il nous suffira de déterminer sur l'épure les points B, C, D, sommets du rectangle ABCD; les sommets E, F, G, H des angles rentrants compris entre le pont et les murs des quais; enfin les points M, N, P, et R, S, Q, où les arêtes visibles des deux piles rencontrent la surface de l'eau.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B | X = | m<br>— 20,74 | C | X = | 17,20 |
| | Z = | 144,23 | | Z = | 156,88 |
| E | X = | — 14,99 | F | X = | — 20,24 |
| | Z = | 129,49 | | Z = | 145,24 |
| G | X = | 16,19 | M | X = | — 4,05 |
| | Z = | 157,38 | | Z = | 133,14 |
| N | X = | — 2,15 | P | X = | — 2,55 |
| | Z = | 133,77 | | Z = | 131,81 |
| R | X = | 8,60 | | | |
| | Z = | 137,36. | | | |

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

$a \begin{cases} x = -367^{mm} \\ y = -577 \end{cases}$ $b \begin{cases} x = -431 \\ y = -520 \end{cases}$ $aa' = 18$
$bb' = 17$

$c \begin{cases} x = 329 \\ y = -478 \end{cases}$ $cc' = 15$ $d' \begin{cases} x = 467 \\ y = -509 \end{cases}$

$e \begin{cases} x = -348 \\ y = -561 \end{cases}$ $f \begin{cases} x = -418 \\ y = -500 \end{cases}$ $g \begin{cases} x = 309 \\ y = -461 \end{cases}$

$h \begin{cases} x = 454 \\ y = -513 \end{cases}$ $m \begin{cases} x = -91 \\ y = -743 \end{cases}$ $n \begin{cases} x = -48 \\ y = -740 \end{cases}$

$p \begin{cases} x = -58 \\ y = -751 \end{cases}$ $r \begin{cases} x = 188 \\ y = -721 \end{cases}$ $s \begin{cases} x = 228 \\ y = -717 \end{cases}$

$q \begin{cases} x = 223 \\ y = -728 \end{cases}$ $mm' = 149$ $ss' = 144$
$pp' = 102$ $qq' = 99$.

Ayant porté sur la toile ces points et ces verticales, nous tirons les droites $a'd'$, $bc$, $b'c'$; nous prolongeons l'alignement $ab$ jusqu'à la rencontre de la ligne d'horizon en $o$, point accidentel de toute horizontale perpendiculaire au pont. D'ailleurs, en déterminant directement la position de ce point, ce qui est plus exact, on le trouve à 1 mètre du centre perspectif, c'est-à-dire au tiers de la distance centrale (110). Les alignements $a'b'$, $ef$, $hg$, $d'c'$, résultant de la position des points déjà obtenus, doivent donc concourir en $o$ : ils composent, avec l'alignement $ab$, la perspective des parapets des quais, et nous les traçons jusqu'à une limite quelconque.

L'alignement $mnrs$, terminé à sa rencontre $h''$ avec la verticale abaissée du point $h$, représente une ligne à fleur d'eau; par suite, la fuyante $h''o$ est l'intersection de la surface de l'eau avec le mur visible de l'un des quais. L'alignement $m's'$ limite l'épaisseur du pont. Les verticales $nn'$, $rr'$ doivent être élevées jusqu'à cette limite. $mm'$ et

Digitized by Google

$rr'$ prolongées rencontrent $eh$ en $m''$ et $r''$; nous tirons les fuyantes $mo$, $ro$, $m''o$, $r''o$; des rencontres $t'$ et $u'$ de ces dernières avec $fg$, nous abaissons les verticales $t't$, $u'u$, et nous complétons ainsi les faces correspondantes aux largeurs des piles. Enfin, nous tirons les petites droites $m'p'$, $n'p'$, $r'q$, $s'q'$.

Si nous n'avions eu à craindre de multiplier à l'excès les lignes de construction sur la toile, nous eussions réduit le nombre des points pris sur l'épure, en effectuant une division perspective de la longueur du pont, dont les parties ont dans l'espace des rapports connus. En opérant ainsi, on pourrait calculer et construire directement les verticales abaissées des points $e$, $h$ jusqu'à la surface de l'eau; elles donneraient une ligne à fleur d'eau à laquelle on appliquerait la division perspective, et les faces visibles des piles s'ensuivraient.

UN MOULIN A VENT A AILES PLANES. (*Fig.* 79.)

134. *La bâtisse du moulin consiste dans un pavillon à base carrée, dont les faces sont larges de* 4 *mètres et hautes de* 10 *mètres. Le toit est une pyramide haute de* $5^m,5$. *La face qui porte les ailes a sa déclinaison* $= 3 : 4$, *et s'éloigne de gauche à droite. L'essieu, dont on néglige l'épaisseur, est dans la base du toit qu'il divise symétriquement; il fait une saillie* $II = 1$ *mètre. On donne pour le centre de rotation :*

$$I \begin{cases} X = -\ 2^m, \\ Y = \ \ 7, \\ Z = \ 35. \end{cases}$$

*Les ailes sont des rectangles larges de* 2 *mètres, longs de* 9 *mètres, et dont les plans sont inclinés de* 60 *degrés sur l'axe de rotation. Le sens de cette inclinaison est tel pour* ABCD, *que le point* A, *plus bas que le point* B, *est*

Digitized by Google

*plus rapproché de l'édifice; et il est tel pour les trois autres ailes, qu'elles viennent tour à tour, par le mouvement de rotation, prendre des positions parfaitement identiques. La distance* IM *de chaque aile au centre de rotation égale* $0^m,5$. *On suppose les lignes longitudinales inclinées de* 45 *degrés sur l'horizon, dans les positions où elles sont représentées.*

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

La mise en perspective de l'édifice est facile, comme nous le verrons. A l'égard des ailes, entre autres constructions praticables, nous imaginerons la suivante : concevant la ligne médiane IMK dans sa position horizontale, nous déterminerons géométralement les quatre sommets de l'aile traversée par cette ligne. Ensuite, faisant décrire à chacun de ses points un angle de 45 degrés, dans le sens du mouvement de rotation, ou dans le sens rétrograde, nous obtiendrons les points A, B, C, D, ou A′, B′, C′, D′ appartenant aux deux ailes situées vers la gauche de l'édifice, et dans les positions que leur assigne le problème. La même opération exécutée vers la droite nous donnera les points A″, B″, C″, D″, ou A‴, B‴, C‴, D‴. Pour réaliser sur l'épure l'opération que nous venons de concevoir, nous devrons employer un plan vertical de projections, parallèle aux lignes longitudinales, et ce qu'il y a de plus simple consiste à prendre le plan même des lignes médianes.

En conséquence, le plan de la base de l'édifice étant pris pour géométral, nous construisons le point $I_1$, projection du centre de rotation; la droite PQ trace du plan des lignes médianes; le point I en prenant la perpendiculaire $I_1I$ = 10 mètres; et l'horizontale $IM_1K_1$, dans laquelle $IM_1 = 0^m,5$ et $M_1K_1$ = 9 mètres; elle représente une ligne médiane en position horizontale. Les côtés AB, CD, dans l'espace, devant être inclinés de 30 degrés sur le plan vertical, nous tirons $A_1M_1B_1$ et $C_1K_1D_1$ égaux à ces côtés et

Digitized by Google

inclinés de 30 degrés sur des perpendiculaires à $IK_1$ ; nous projetons leurs extrémités sur ces perpendiculaires et nous obtenons les projections verticales $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$, des quatre points principaux de l'aile dans cette position.

Maintenant, si l'aile décrit un angle de 45 degrés, suivant le mouvement de rotation, chaque projection verticale décrit un angle de cette valeur et de même sens autour du point I : nous décrivons donc ces angles et obtenons les nouvelles projections verticales $A_3$, $B_3$, $C_3$, $D_3$. Les projections horizontales sont situées sur des parallèles à PQ, dont les distances à cette droite égalent $A_1A_2$, ou $B_1B_2$, et nous les obtenons en abaissant les perpendiculaires $A_3A_4$, $B_3B_4$, $C_3C_4$, $D_3D_4$ jusqu'à la rencontre de ces parallèles. Nous avons ainsi, par leurs projections, les quatre points principaux de l'aile ABCD.

En décrivant les mêmes angles que ci-dessus, mais en sens contraire du mouvement de rotation, nous construisons pareillement les projections verticales $A'_3$, $B'_3$, $C'_3$, $D'_3$ et les projections horizontales $A'_4$, $B'_4$, $C'_4$, $D'_4$ des quatre points de l'aile A'B'C'D'. Enfin, deux opérations semblables effectuées vers la droite donneraient les points analogues des deux autres ailes ; mais il est évident qu'il doit y avoir symétrie par rapport à la droite $II_1$, et que les projections de ces nouveaux points peuvent en conséquence se conclure immédiatement de celles des précédents. Il ne restera donc plus ensuite, relativement aux ailes, qu'à prendre sur l'épure les valeurs des coordonnées, en observant que les élévations verticales au-dessus du sol de l'édifice sont mesurées par les hauteurs des projections verticales au-dessus de la ligne de terre, tandis que les projections horizontales déterminent les ordonnées X et Z.

Nous aurions pu réduire encore la construction, en observant que les droites $A_4B_4$ et $A'_4B'_4$, $C_4D_4$ et $C'_4D'_4$ doivent se couper sur la ligne de terre et avoir la même incli-

Digitized by Google

naison sur cette ligne; tandis que les distances des projections verticales à la droite $IK_1$ sont inversement symétriques. Observons enfin que si l'on construit les points M et K en décrivant les rayons $IM_1$ et $IK_1$ des arcs de 45 degrés, leurs projections horizontales $M_2$ et $K_2$ devront coïncider avec le point d'intersection des droites $A_4B_4$ et $A'_4B'_4$, $C_4D_4$ et $C'_4D'_4$.

Quant à l'édifice, nous obtenons sa projection horizontale, en prenant sur la droite $I_1I$ la distance $I_1I'_1 = 1$ mètre, et construisant le carré RPQ dont les côtés, longs de 4 mètres, sont parallèles ou perpendiculaire à cette droite. Le point $O_1$, projection du sommet, est la rencontre des diagonales, ou sa distance au point $I_1 = 2$ mètres.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| A | X = | — 3,07 | B | X = | — 1,49 |
| | Y = | 6,74 | | Y = | 7,97 |
| | Z = | 34,82 | | Z = | 34,75 |
| C | X = | — 8,16 | D | X = | — 6,58 |
| | Y = | 13,10 | | Y = | 14,33 |
| | Z = | 31,00 | | Z = | 30,94 |
| A′ | X = | — 2,09 | B′ | X = | — 2,47 |
| | Y = | 6,03 | | Y = | 7,26 |
| | Z = | 35,55 | | Z = | 34,02 |
| C′ | X = | — 7,18 | D′ | X = | — 7,56 |
| | Y = | 0,33 | | Y = | 0,90 |
| | Z = | 31,74 | | Z = | 30,20 |
| A″ | X = | — 2,51 | B″ | X = | — 0,93 |
| | Y = | 7,97 | | Y = | 6,74 |
| | Z = | 85,24 | | Z = | 35,18 |
| C″ | X = | 2,58 | D″ | X = | 4,16 |
| | Y = | 14,33 | | Y = | 13,10 |
| | Z = | 39,06 | | Z = | 39,00 |

Digitized by Google

$$A''' \begin{cases} X = -1,53 \\ Y = 7,26 \\ Z = 35,98 \end{cases} \qquad B''' \begin{cases} X = -1,91 \\ Y = 6,03 \\ Z = 34,44 \end{cases}$$

$$G''' \begin{cases} X = 3,56 \\ Y = -0,90 \\ Z = 39,80 \end{cases} \qquad D''' \begin{cases} X = 3,18 \\ Y = -0,33 \\ Z = 38,26 \end{cases}$$

$$P \begin{cases} X = -4,02 \\ Y = -3,00 \\ Z = 34,06 \end{cases} \qquad Q \begin{cases} X = -1,00 \\ Y = -3,00 \\ Z = 37,00 \end{cases}$$

$$R \begin{cases} X = -6,60 \\ Y = -3,00 \\ Z = 37,80 \end{cases} \qquad I' \begin{cases} X = -2,60 \\ Y = 7,00 \\ Z = 35,80. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

$$i \begin{cases} x = -114 \\ y = 400 \end{cases} \qquad a \begin{cases} x = -176 \\ y = 387 \end{cases} \qquad b \begin{cases} x = -86 \\ y = 458 \end{cases}$$

$$c \begin{cases} x = -526 \\ y = 845 \end{cases} \qquad d \begin{cases} x = -425 \\ y = 926 \end{cases} \qquad m \begin{cases} x = -131 \\ y = 423 \end{cases}$$

$$a' \begin{cases} x = -117 \\ y = 339 \end{cases} \qquad b' \begin{cases} x = -145 \\ y = 427 \end{cases} \qquad c' \begin{cases} x = -452 \\ y = -21 \end{cases}$$

$$d' \begin{cases} x = -501 \\ y = 59 \end{cases} \qquad m' \begin{cases} x = -131 \\ y = 382 \end{cases} \qquad a'' \begin{cases} x = -142 \\ y = 452 \end{cases}$$

$$b'' \begin{cases} x = -52 \\ y = 383 \end{cases} \qquad c'' \begin{cases} x = 132 \\ y = 733 \end{cases} \qquad d'' \begin{cases} x = 213 \\ y = 665 \end{cases}$$

$$a''' \begin{cases} x = -82 \\ y = 403 \end{cases} \qquad b''' \begin{cases} x = -110 \\ y = 350 \end{cases} \qquad c''' \begin{cases} x = 179 \\ y = 41 \end{cases}$$

$$d''' \begin{cases} x = 166 \\ y = -17 \end{cases} \qquad i' \begin{cases} x = -145 \\ y = 391 \end{cases} \qquad p \begin{cases} x = -243 \\ y = -173 \end{cases}$$

$$q \begin{cases} x = -54 \\ y = -162 \end{cases} \qquad r \begin{cases} x = -349 \\ y = -159 \end{cases} \qquad o \begin{cases} x = -197 \\ y = 671 \end{cases}$$

$$pp' = 578 \qquad qq' = 541 \qquad rr' = 529.$$

Digitized by Google

La construction de la perspective demandée se réduit à celle de ces points et de ces trois verticales, reliés par des lignes de jonction. En l'exécutant, nous trouvons que trois ailes se superposent de manière à rendre invisibles les points $a$ et $a''$. Mais la position de ces derniers points n'en est pas moins indispensable pour fixer les directions des droites $ac$ et $a''c''$. Nous remarquons que l'aile $abcd$ surpasse notablement les autres par sa grandeur apparente, ce qui s'explique d'après son élévation dans l'espace, combinée avec le sens de sa direction (22).

UN TÉTRAÈDRE RÉGULIER. (*Fig.* 80.)

135. On sait qu'il existe seulement cinq polyèdres réguliers convexes, c'est-à-dire cinq polyèdres convexes, dont toutes les faces soient des polygones réguliers d'un même nombre de côtés : ce sont le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Or, le cube est facile à mettre en perspective; les autres sont l'objet de ce problème et des trois suivants :

*Le côté d'un tétraèdre régulier égale* 3 *mètres; le triangle* ABC, *qui représente sa base, est horizontal, et le côté* CB *est parallèle au tableau.*

$$A \begin{cases} X = -\ 4^{m}, \\ Y = -\ 4, \\ Z = \ \ 14. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Prenant pour géométral le plan du triangle ABC, nous construisons ce triangle et son centre $D_1$, sur lequel se projette le sommet D de la pyramide : cette construction nous donne les ordonnées X et Z des points B, C, D. Nous obtenons l'ordonnée Y du point D, la seule qui soit inconnue, en construisant le triangle rectangle $AD_1D$, de manière que son hypoténuse AD égale un côté du tétraèdre; car il est

Digitized by Google

évident que $D_1D$ mesure l'élévation du sommet au-dessus de la base. On pourrait aussi calculer cette élévation, sachant que la hauteur du tétraèdre égale son côté multiplié par $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Dans tous les cas, on trouvera $D_1D = 2^m,450$, d'où il suit que pour le point D, on a $Y = -1^m,550$.

*Résultat géométral.*

$$B \begin{cases} X = -2^m,500 \\ Z = 16,598 \end{cases} \qquad C \begin{cases} X = 5,500 \\ Z = 16,598 \end{cases}$$

$$D \begin{cases} X = -4, \\ Z = 732. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

$$a \begin{cases} x = -857^{mm} \\ y = -857 \end{cases} \qquad b \begin{cases} x = -452 \\ y = -723 \end{cases}$$

$$c \begin{cases} x = -994 \\ y = -723 \end{cases} \qquad d \begin{cases} x = -763 \\ y = -296. \end{cases}$$

La perspective étant construite, il faut que la droite *am*, dirigée du point *a* vers le centre perspectif, se trouve diviser *bc* en parties égales.

UN OCTAÈDRE RÉGULIER. (*Fig.* 81.)

136. *Le côté d'un octaèdre régulier égale* 3 *mètres; le carré* ABCD *qui le décompose en deux pyramides symétriques est horizontal, et l'on donne pour son sommet de gauche :*

$$A \begin{cases} X = -2^m, \\ Y = -5, \\ Z = 21. \end{cases}$$

*La déclinaison de* AB = 3 : 4, *la droite s'approchant de gauche à droite.*

*La distance centrale* = $3^m,6$.

Digitized by Google

Nous déterminons géométralement la position des points visibles B, C, et celle du point $G_1$, centre du carré et projection commune aux deux sommets opposés G, H. Nous obtenons la distance de chacun de ces derniers points à leur projection, en construisant un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit soit $AG_1$, et dont l'hypoténuse égale un côté du polyèdre ; mais ce triangle n'est autre que $AG_1B$, et la distance cherchée égale en conséquence la moitié de la base multipliée par $\sqrt{2}$. On trouve de la sorte que pour le point G, $Y = -2^m,879$. D'ailleurs un seul des deux points G et H détermine l'autre sur le tableau.

*Résultat géométral.*

$$B \begin{cases} X = 4,4 \\ Z = 19,2 \end{cases} \quad C \begin{cases} X = 6,2 \\ Z = 21,6 \end{cases} \quad G \begin{cases} X = 4,1 \\ Z = 21,3. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

$$a \begin{cases} x = 343^{mm} \\ y = -857 \end{cases} \quad b \begin{cases} x = 825 \\ y = -938 \end{cases}$$

$$c \begin{cases} x = 1033 \\ y = -833 \end{cases} \quad g \begin{cases} x = 693 \\ y = 487. \end{cases}$$

Ces quatre points étant fixés sur la toile, nous abaissons la verticale *gh*, de telle longueur que la diagonale *ac* la divise en parties égales, et nous tirons des lignes de jonction.

UN DODÉCAÈDRE RÉGULIER. (*Fig.* 82.)

137. *Un dodécaèdre régulier a* 4 *mètres de côté; la face* ABCDE *est horizontale et forme la base inférieure*



Digitized by Google

*du solide*; AB *est parallèle au tableau :*

$$A\begin{cases} X = -\ 8^{m}, \\ Y = -\ 13, \\ Z = \ \ 60. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 6 *mètres.*

La surface du polyèdre se compose de deux faces horizontales, qui seront ses bases, de cinq faces adjacentes à la base inférieure et de cinq autres adjacentes à la base supérieure. Si nous avions la position des bases et celles des faces inférieures, tous les sommets seraient déterminés, et l'on achèverait les faces supérieures par des lignes de jonction. Or, il est facile d'arriver à ce résultat, en remarquant d'ailleurs que, d'après la symétrie par rapport à un plan vertical conçu suivant le point D et le centre du polyèdre, les coordonnées des points situés à gauche se concluent de celles des points situés à droite, et qu'il suffit de considérer ceux qui doivent être visibles.

Prenant pour géométral le plan de la base inférieure, nous construisons cette base et la projection $K_1R_1Q_1P_1S_1$ de la base supérieure ; ces deux polygones égaux sont concentriques, mais de positions inverses : nous ajoutons à cette construction les rabattements ABGFJ, BGHMC des pentagones adjacents aux côtés AB, BC. Nous déterminons, par une opération de géométrie élémentaire, l'inclinaison que doivent avoir, sur le plan de la base, ces polygones relevés dans l'espace ; et, à cet effet, nous observons que, chaque sommet du polyèdre réunissant trois angles plans, l'opération consiste à chercher l'inclinaison mutuelle des faces d'un trièdre dont les angles plans sont donnés, et à en prendre le supplément. Cette inclinaison étant connue, nous employons deux plans verticaux de projections, passant par les points B, C, perpendiculairement aux côtés AB, BC, et nous relevons les sommets de nos pentagones

Digitized by Google

par le procédé déjà si souvent appliqué. Nous prenons donc sur l'épure les coordonnées des points F, G, H, M, au moyen de leurs projections horizontales $F_1$, $G_1$, $H_1$, $M_1$ et de leurs projections verticales F′, G′, H′, M′.

L'élévation de la base supérieure se trouve déterminée. En effet, les faces adjacentes aux deux bases sont disposées semblablement, sauf l'inversion; d'où il suit que la distance du point G à la base inférieure égale celle du point H à la base supérieure, et *vice versâ*. Donc, la distance des bases est la somme des élévations des deux points G et H au-dessus de la base inférieure. Par suite, la position complète de la base supérieure est connue, puisque nous avons sa projection.

Nous trouverons sur l'épure les points G et R, M et H, également distants du plan normal, ce qu'il était aisé de prévoir.

Il est évident en effet que les projections géométrales $G_1$ et $R_1$ sont également distantes de l'axe OZ : d'une autre part, le point H est situé par rapport au point B de la même manière que M par rapport à P; les deux points H et M doivent en conséquence se trouver dans un plan vertical parallèle à celui qui passerait par B et P, et ce plan serait lui-même parallèle au plan normal.

Quelques propriétés particulières au dodécaèdre régulier nous eussent permis d'abréger les constructions. L'inclinaison des faces sur le plan de la base a pour rapport exact celui de 2 : 1. En outre, les projections $F_1$, $H_1$ des sommets F, H coïncident avec les centres des pentagones rabattus (*).

(*) On peut démontrer effectivement, par la trigonométrie sphérique, que l'inclinaison mutuelle de deux faces du dodécaèdre a sa tangente égale à $-2$. Dès lors, la distance $F_1T$ du point $F_1$ à la droite AB doit être $\frac{FT}{\sqrt{5}}$, et c'est aussi la valeur du rayon du cercle inscrit dans le pentagone.



Digitized by Google

*Résultat géométral.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| C | X = — 2,763 m<br>Y = — 13,000<br>Z = 63,804 | F | X = — 6,000<br>Y = — 7,495<br>Z = 57,247 |
| G | X = — 2,764<br>Y = — 9,597<br>Z = 58,299 | H | X = — 0,764<br>Y = — 7,495<br>Z = 61,051 |
| M | X = — 0,764<br>Y = — 9,597<br>Z = 64,454 | K | X = — 6,000<br>Y = — 4,092<br>Z = 59,350 |
| R | X = — 2,764<br>Y = — 4,092<br>Z = 61,701 | P | X = — 4,000<br>Y = — 4,092<br>Z = 65,505. |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *a* | $x = -$ 800 m<br>$y = -$ 1300 | *ab* = 400 | *c* | $x = -$ 260<br>$y = -$ 1223 | |
| *f* | $x = -$ 629<br>$y = -$ 785 | *g* | $x = -$ 284<br>$y = -$ 988 | *h* | $x = -$ 73<br>$y = -$ 737 |
| *m* | $x = -$ 69<br>$y = -$ 893 | *k* | $x = -$ 607<br>$y = -$ 414 | *r* | $x = -$ 269<br>$y = -$ 398 |
| *s* | $x = -$ 900<br>$y = -$ 398 | *p* | $x = -$ 366<br>$y = -$ 375 | *pq* = 366 | |
| *e* | $x = -$ 869<br>$y = -$ 1223 | *j* | $x = -$ 951<br>$y = -$ 988 | *l* | $x = -$ 1104<br>$y = -$ 737 |
| *n* | $x = -$ 1048<br>$y = -$ 893. | | | | |

Il ne reste qu'à porter ces valeurs sur la toile, et tirer les lignes de jonction qui doivent représenter les arêtes du polyèdre.

Digitized by Google

Nous pouvions réduire le résultat perspectif, et construire sur le tableau une partie des points qui sont à gauche au moyen de leurs correspondants vers la droite. Ainsi d'abord, les points $r$ et $p$ auraient déterminé $s$ et $q$, comme les extrémités de deux horizontales que la fuyante $k$V eût divisées en parties égales. Nous aurions de même obtenu le point $l$, avec le point $h$ et la fuyante $f$V; le point $e$, avec le point $c$ et la fuyante menée par le milieu de $ab$; et le point $n$, à l'aide du point $m$, et de la fuyante conçue par le milieu de $mn$. Mais ici comme dans tous nos problèmes, les propriétés qui n'abrégent pas la construction directe servent à la vérifier.

Si l'on joignait les points qui représentent deux à deux les extrémités d'un même diamètre, toutes les lignes se couperaient en un même point, perspective du centre du dodécaèdre.

UN ICOSAÈDRE RÉGULIER. (*Fig.* 83.)

138. *Un icosaèdre régulier a* 4 *mètres de côté; le triangle* ABC *est horizontal, et le côté* AB *est parallèle au tableau :*

$$A \begin{cases} X = \overset{m}{7}, \\ Y = -12, \\ Z = 32. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 5 *mètres.*

La construction géométrale dépendra de la manière dont nous envisagerons la formation du polyèdre. Nous concevrons sa surface composée des deux triangles ABC, MEN qui en représentent les bases inférieure et supérieure, de deux pyramides pentagonales en quelque sorte opposées, et dont l'une, totalement visible, a pour sommet le point S, et des huit triangles compris entre ces pyramides et les bases.

Les sommets du polyèdre sont, deux à deux, situés sur les extrémités d'un même diamètre. Cette propriété, dont



Digitized by Google

nous aurions pu également faire usage pour le dodécaèdre, nous servira à déterminer le point P au moyen du point D. Les points visibles se réduisent, avec ce point P, à ceux que contiennent la pyramide pentagonale dont le sommet est en S, et la base supérieure.

En conséquence, nous construisons le triangle ABC, dont le plan est pris pour géométral; le triangle $M_1E_1N_1$, projection de la base supérieure, concentrique au premier, et de position inverse; et le pentagone AFEDB, rabattement de la base de la pyramide pentagonale considérée. Nous concevons par B un plan vertical de projection perpendiculaire à BA, et nous observons que le point E du pentagone relevé doit se projeter horizontalement en $E_1$; nous obtenons donc la projection verticale E′ de ce point, comme la rencontre de la droite $E_1E'$ perpendiculaire à la ligne de terre avec l'arc de cercle que décrit cette projection verticale en se relevant. De là résultent la trace verticale BE′ du plan du pentagone, et par suite le relèvement des deux autres sommets F et D de ce polygone.

Le point S est l'extrémité d'une perpendiculaire au même plan, passant par le centre du cercle inscrit dans le pentagone; cette perpendiculaire peut représenter un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté serait le rayon du cercle inscrit, et l'hypoténuse la hauteur de l'un des triangles équilatéraux du polyèdre; dès lors, nous obtenons la projection verticale S′, en prenant BR égale au rayon du cercle inscrit et construisant le triangle rectangle BRS′ dont l'hypoténuse BS′ égale la hauteur du triangle ABC. La projection horizontale $S_1$ s'ensuit. Nous vérifions cette construction en rabattant le triangle ABS et décrivant l'arc de cercle qui servirait à relever le point S: cet arc doit passer en S′.

L'élévation du point E′ au-dessus de la ligne de terre fixe la position du triangle MEN. Le centre du polyèdre est le point ($I_1$, I′), milieu de la verticale élevée par les

Digitized by Google

centres des bases. Le point P est l'extrémité d'une droite menée du point D au centre et prolongée d'une longueur égale : nous l'obtenons donc sur l'épure en tirant $D_1I_1P_1$ et $D'I'P'$, de manière que $I_1P_1 = D_1I_1$ et $I'P' = D'I'$. Les projections $P_1$, $P'$ du point ainsi déterminé devront se trouver situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

*Résultat géométral.*

$$D\left\{\begin{array}{l} X = \overset{m}{12,236} \\ Y = -\ 8,263 \\ Z = 31,286 \end{array}\right. \qquad E\left\{\begin{array}{l} X = 9,000 \\ Y = -\ 5,954 \\ Z = 30,845 \end{array}\right.$$

$$F\left\{\begin{array}{l} X = 5,764 \\ Y = -\ 8,263 \\ Z = 31,286 \end{array}\right. \qquad S\left\{\begin{array}{l} X = 9,000 \\ Y = -\ 9,691 \\ Z = 29,413 \end{array}\right.$$

$$M\left\{\begin{array}{l} X = 7,000 \\ Y = -\ 5,954 \\ Z = 34,309 \end{array}\right. \qquad P\left\{\begin{array}{l} X = 5,764 \\ Y = -\ 9,691 \\ Z = 35,023. \end{array}\right.$$

*Résultat perspectif.*

$$a\left\{\begin{array}{l} x = \overset{mm}{1094} \\ y = -1875 \end{array}\right. \quad ab = 625 \quad d\left\{\begin{array}{l} x = 1955 \\ y = -1322 \end{array}\right.$$

$$e\left\{\begin{array}{l} x = 1459 \\ y = -\ 964 \end{array}\right. \quad f\left\{\begin{array}{l} x = 912 \\ y = -1322 \end{array}\right. \quad s\left\{\begin{array}{l} x = 1530 \\ y = -1648 \end{array}\right.$$

$$m\left\{\begin{array}{l} x = 1020 \\ y = -\ 868 \end{array}\right. \quad mn = 583 \quad p\left\{\begin{array}{l} x = 823 \\ y = -1384. \end{array}\right.$$

La construction de la perspective est immédiate. La principale vérification consiste en ce que les lignes *an*, *bm*, *dp*, par lesquelles on joindrait des sommets diamétralement opposés, devraient se couper en un même point, ainsi que dans le dodécaèdre.

Digitized by Google

UN PONT AVEC DES ARCHES A PLEIN CINTRE. (*Fig* 84.)

**139.** Ce problème et ceux qui terminent le paragraphe nous offriront des surfaces polyédriques compliquées de lignes courbes.

*La longueur* AC *d'un pont est de* 30 *mètres, et sa largeur, en y comprenant l'épaisseur des parapets, est de* 14 *mètres: son tablier ne sera pas visible. Le bord visible* ABC *se compose de deux droites égales, chacune d'elles ayant pour rapport d'inclinaison* 1 : 9; *leur déclinaison* = 1 : 3, *de sens tel que* CA *s'éloigne de droite à gauche. Les points* A *et* C *sont élevés de* 18 *mètres au-dessus de l'eau.*

$$A \begin{cases} X = -13^{m}, \\ Y = 3, \\ Z = 80. \end{cases}$$

*Deux arches à plein cintre, ou dont les voûtes sont des cylindres à bases demi-circulaires, supportent le pont: leur largeur, ou le diamètre des cylindres, égale* 9 *mètres, et leur plus grande élévation au-dessus de l'eau,* 14 *mètres; elles sont symétriquement espacées. L'épaisseur de la pile mitoyenne est de* 4 *mètres.*

*Les quais adjacents, dont les murs sont verticaux, font avec la face visible du pont des angles de* 120 *degrés, et ils s'étendent indéfiniment.*

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

L'opération géométrale relative aux arcs de cercles se rapporte au n° **121**; elle est facile, soit que nous prenions pour géométral le plan d'horizon, ou celui de la surface de l'eau, ou bien encore un plan conçu par la naissance des voûtes. Quant à la partie polyédrique, nous obtiendrons les coordonnées de ses points par leurs projections horizontales, leurs ordonnées Y se concluant immédiatement de

Digitized by Google

l'énoncé. L'élévation du point B au-dessus de la ligne AC est d'ailleurs égale au neuvième de 15 mètres. Nous nous réservons de faire usage du point accidentel des droites de l'espace perpendiculaires à la face visible du pont, la distance de ce point au centre perspectif n'étant que de 1 mètre (110).

En conséquence, nous prendrons sur l'épure les points suivants : B et C sur le bord du pont; J, K, R, S, O, W, rencontre des arêtes verticales des piles avec la surface de l'eau; E, F, les deux points les plus élevés des demi-cercles antérieurs, dans l'espace; G, H, qui divisent le quart de cercle J'E en trois parties égales, et leurs analogues G', H', M, N, M', N'; enfin, sur l'étendue indéfinie des quais, pour fixer leurs directions, deux points P et Q de leurs parapets, distants de 10 mètres des points A et C.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| B | X = | 1,23 | J | X = | — 9,21 |
| | Z = | 75,26 | | Z = | 78,74 |
| K | X = | — 0,67 | O | X = | — 4,78 |
| | Z = | 75,89 | | Z = | 92,02 |
| P | X = | — 20,48 | Q | X = | 17,46 |
| | Z = | 73,37 | | Z = | 60,72 |
| E | X = | — 4,94 | F | X = | 7,40 |
| | Z = | 77,31 | | Z = | 73,20 |
| G | X = | — 8,63 | H | X = | — 7,07 |
| | Y = | — 3,15 | | Y = | — 1,60 |
| | Z = | 78,54 | | Z = | 78,02. |

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

$a \begin{cases} x = -487^{mm} \\ y = 112 \end{cases}$ $b \begin{cases} x = 49 \\ y = 186 \end{cases}$ $c \begin{cases} x = 659 \\ y = 128 \end{cases}$

$j \begin{cases} x = -351 \\ y = -573 \end{cases}$ $k \begin{cases} x = -26 \\ y = -593 \end{cases}$ $r \begin{cases} x = 126 \\ y = -603 \end{cases}$

$s \begin{cases} x = 488 \\ y = -627 \end{cases}$ $jj' = 362$ $ss' = 397$ $o \begin{cases} x = -156 \\ y = -489 \end{cases}$

$w \begin{cases} x = 258 \\ y = -512 \end{cases}$ $p \begin{cases} x = -837 \\ y = 123 \end{cases}$

$q \begin{cases} x = 863 \\ y = 148 \end{cases}$ $pp' = 736$ $qq' = 889$ $e \begin{cases} x = -192 \\ y = -39 \end{cases}$

$f \begin{cases} x = 303 \\ y = -41 \end{cases}$ $g \begin{cases} x = -329 \\ y = -124 \end{cases}$ $h \begin{cases} x = 272 \\ y = 62 \end{cases}$

$g' \begin{cases} x = -49 \\ y = -128 \end{cases}$ $h' \begin{cases} x = -110 \\ y = -63 \end{cases}$ $m \begin{cases} x = 149 \\ y = -131 \end{cases}$

$n \begin{cases} x = 214 \\ y = -65 \end{cases}$ $m' \begin{cases} x = 462 \\ y = -135 \end{cases}$ $n' \begin{cases} x = 394 \\ y = -66. \end{cases}$

Ces valeurs déterminent immédiatement la perspective de la partie polyédrique de l'édifice et celle des demi-cercles antérieurs; elles déterminent aussi la ligne à fleur d'eau *a'jkrsc'*, aboutissant aux verticales abaissées des points *a* et *c*, ainsi que les autres lignes *a'p'*, *c'q'*, *ow*, de même niveau, et que nous prolongeons indéfiniment. Pour rattacher aux arcs antérieurs les portions visibles de leurs opposés, nous prenons le point accidentel *t* des horizontales de l'espace dont la déclinaison = 3 : 1, lequel, comme nous l'avons observé déjà, est à 1 mètre du centre, tiers de la distance centrale : les directions *jo*, *rw* doivent se trouver concourir en ce point.

Nous obtenons d'abord l'arête verticale *oo'* de la pre-

Digitized by Google

mière pile, en l'élevant jusqu'à la rencontre de la fuyante $j't$. L'arête $ww'$ se construit semblablement. D'un point quelconque $g$ du premier arc antérieur, nous abaissons la verticale $gg_1$ sur $a'c'$; nous tirons la fuyante $g_1t$ jusqu'à sa rencontre $d'$ avec $ow$; nous élevons la verticale $d'd$, dont l'intersection $d$ avec la fuyante $gt$ est un point de l'arc postérieur. Car il est visible que la droite $gd$, obtenue par cette construction, représente une arête de la surface cylindrique, et $g_1d'$ sa projection sur la surface de l'eau. Il ne reste donc qu'à répéter l'opération à l'égard des autres points qui ont été considérés sur les arcs antérieurs.

UN ÉDIFICE SURMONTÉ D'UN DOME. (*Fig.* 85.)

140. *Un édifice symétrique a sa façade parallèle au tableau; il se compose de trois parties: un pavillon et deux ailes. Les murs du pavillon ont* 16 *mètres de haut sur* 10 *de large; ceux des ailes ont* 9 *mètres sur* 10. *L'épaisseur de l'édifice est de* 10 *mètres. La toiture du pavillon est un dôme à quatre versants cylindriques se coupant suivant quatre quarts de cercles verticaux; ces quarts de cercles aboutissent à la base d'un plus petit pavillon dont les murs ont* 1 *mètre de haut sur* 2 *de côté, et qui se termine par une pyramide haute de* 1 *mètre. Cette condition détermine la grandeur des quarts de cercles. Les toits des ailes sont inclinés de* 45 *degrés, ainsi que les triangles qui en forment les versants latéraux. Le sol de l'édifice est à* 13 *mètres au-dessous du plan d'horizon; pour le sommet du petit pavillon on donne:*

$$1 \left\{ \begin{array}{l} X = 27^{m} \\ Z = 105. \end{array} \right.$$

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Nous commencerons par observer que la convexité des

Digitized by Google

surfaces cylindriques donne lieu à un contour apparent de ces surfaces (44), qui s'interpose entre le spectateur et la base du petit pavillon. Le problème rentre donc, à la rigueur, dans la classe de ceux qui concernent les surfaces courbes. Mais cet effet d'interposition est peu sensible, par suite de l'éloignement et de l'élévation du point de vue; nous le négligerons et supposerons ce pavillon visible jusqu'à sa base.

Cela posé, les coordonnées aériennes de tous les points principaux des faces polyédriques sont données par l'énoncé. Les arcs de cercles donnent lieu à une opération géométrale, mais elle sera très-simple. Le plan de la base du dôme étant considéré comme géométral, nous construisons cette base ABF, et la projection $O_1R_1S_1$ de la base du petit pavillon. Nous rabattons les arcs qui se projettent suivant la diagonale AF, et nous prenons quelques points sur chacun d'eux : nous trouverons de l'avantage à prendre des points qui aient des projections équidistantes sur AF, par exemple les points M, M′, M″, O′, L, L′, L″, S′, dont les projections $M_1$, $M'_1$, $M''_1$,... divisent $AO_1$ et $FS_1$ en quatre parties égales. Comme la distance de AB à $O_1R_1$ doit être égale à 4 mètres, on voit que les ordonnées X et Z de ces points différeront consécutivement de 1 mètre. Leurs élévations verticales ou les longueurs $MM_1$, $M'M'_1$,... seront respectivement les mêmes pour les deux arcs. Quant à l'arc intermédiaire qui se projette suivant $BR_1$, nous le construirons sur le tableau au moyen des précédents.

On comprendra d'ailleurs combien il serait facile d'appliquer le calcul à la détermination des longueurs $MM_1$, $M'M'_1$,... et d'obtenir ainsi, sans le secours d'une épure, tous les éléments de la construction perspective.

Digitized by Google

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| M | X = | − 31,00 m | M′ | X = | − 30,00 |
| | Y = | 6,74 | | Y = | 7,90 |
| | Z = | 101,00 | | Z = | 102,00 |
| M″ | X = | − 29,00 | O′ | X = | − 28,00 |
| | Y = | 8,48 | | Y = | 8,66 |
| | Z = | 103,00 | | Z = | 104,00 |
| L | X = | − 23,00 | | | |
| | Y = | 6,74 | etc. | | |
| | Z = | 109,00 | | | |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $x =$ | − 771 mm | $a$ | $x =$ | − 960 |
| | $y =$ | 305 | | $y =$ | 90 |
| | | | | $ab =$ | 300 |
| | | | | $aa' = bb' =$ | 210 |
| | $a'd = b'c =$ | 300 | | | |
| | $dd' = cc' =$ | 270 | $g$ | $x =$ | − 486 |
| | | | | $y =$ | 29 |
| | | | | $gh =$ | 571 |
| | | | | $gk =$ | 143 |
| $p$ | $x =$ | − 327 | $f$ | $x =$ | − 600 |
| | $y =$ | − 109 | | $y =$ | 82 |
| $o$ | $x =$ | − 808 | | $oo' =$ | 29 |
| | $y =$ | 279 | | $or =$ | 58 |
| $s$ | $x =$ | − 736 | | | |
| | $y =$ | 273 | | | |
| $m$ | $x =$ | − 921 | $m'$ | $x =$ | − 882 |
| | $y =$ | 200 | | $y =$ | 232 |
| $m''$ | $x =$ | − 845 | | | |
| | $y =$ | 247 | | | |
| $l$ | $x =$ | − 633 | $l'$ | $x =$ | − 667 |
| | $y =$ | 185 | | $y =$ | 219 |
| $l''$ | $x =$ | − 701 | | | |
| | $y =$ | 238. | | | |

Les lignes droites de l'édifice et les deux arcs elliptiques $amm'm''o'$, $fll'l''s'$ se construisent immédiatement, en observant que le point $p'$ est l'intersection de la verticale $pp'$ avec la fuyante $c'$V. Nous obtenons l'arc intermédiaire $bnn'n''r'$, en tirant les horizontales $mn$, $m'n'$, $m''n''$, jusqu'à leurs rencontres avec les droites $ln$, $l'n'$, $l''n''$ dont les direc-

Digitized by Google

tions concourent au centre perspectif; mais il serait préférable dans la pratique de construire cet arc par ses coordonnées, le calcul en étant très-simple. Les droites *bf*, *rs*, *r's'*, *cp* doivent se trouver dirigées vers le centre.

On achèverait facilement la perspective de l'édifice dans sa partie invisible, et il en résulterait de nouveaux moyens de vérification. On comprend en particulier que la verticale *ü''* doit passer par le point de rencontre des diagonales de la base de l'édifice, ou de celles du pavillon, et diviser *gh* en parties égales.

LE MÊME ÉDIFICE DANS UNE AUTRE POSITION. (*Fig.* 86.)

141. *L'édifice du problème précédent ayant tourné d'un mouvement de révolution autour de la verticale* II', *sa façade a pris une déclinaison de* 45 *degrés, de tel sens qu'elle s'éloigne de gauche à droite.*

*La distance centrale est toujours de* 3 *mètres.*

Les ordonnées Y de tous les points ont conservé leurs valeurs primitives. Les X et les Z se déterminent par une projection géométrale. On formerait par un calcul facile les valeurs de ces ordonnées, si l'on faisait usage du rapport de la diagonale au côté d'un carré, observant d'ailleurs que, dans chaque carré horizontal de l'édifice, une des diagonales est devenue parallèle et l'autre perpendiculaire au tableau. On trouve ainsi notamment que, pour les points M, M', M'', O', les ordonnées Z croissent consécutivement de $1^m,414$, c'est-à-dire d'un dixième de la diagonale, par suite du choix que nous avons fait de ces points, tandis que leurs ordonnées X sont toutes égales à — 27. Quant aux arcs ET', BR', leurs plans sont parallèles au tableau, et leurs perspectives des quarts de cercles dont les centres et le rayon résulteront de la construction.

Digitized by Google

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | X = — 27,00 m<br>Z = 97,93 | B | X = — 19,93<br>Z = 105,00 | | |
| M | X = — 27,00<br>Z = 99,34 | M′ | X = — 27,00<br>Z = 100,76 | etc. | |
| G | X = — 19,93<br>Z = 102,07 | K | X = 30,53<br>Z = 101,46. | | |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $x = -$ 771 mm<br>$y =$ 305 | $a$ | $x = -$ 827<br>$y =$ 92 | $b$ | $x = -$ 570<br>$y =$ 86 |
| $c$ | $x = -$ 344<br>$y =$ 107 | $d$ | $x = -$ 1125<br>$y = -$ 132 | $cc' =$ 241<br>$dd' =$ 300 | |
| $g$ | $x = -$ 533<br>$y =$ 27 | $h$ | $x = -$ 1044<br>$y =$ 31 | $k$ | $x = -$ 903<br>$y =$ 30 |
| $m$ | $x = -$ 815<br>$y =$ 204 | $m'$ | $x = -$ 804<br>$y =$ 235 | $m''$ | $x = -$ 793<br>$y =$ 249 |
| $o$ | $x = -$ 782<br>$y =$ 280 | $r$ | $x = -$ 731<br>$y =$ 276 | $oo' =$ 29<br>$rr' =$ 29. | |

Ce résultat nous donne immédiatement une partie de la perspective : pour la compléter, nous tirons les horizontales $rt$, $r't'$, $be$, $a'q$, $a''q'$ de telles longueurs que la verticale $ii'$ les divise en parties égales, et nous obtenons les points $t$, $t'$, $e$, $q$, $q'$. Nous abaissons les verticales $tt't_1$, $rr'r_1$, sur l'horizontale $be$; des points $t_1$ et $r_1$ comme centres avec les rayons $t_1e$, $r_1b$, nous décrivons deux quarts de cercles qui aboutiront exactement en $t'$ et $r'$, si la construction est exacte. Les droites qui déclinent de 45 degrés dans l'espace se trouveront dirigées vers les points de distance ; mais ces points sont généralement en dehors des limites du tableau.

Digitized by Google

On peut se proposer, comme dans le problème précédent, de rattacher aux lignes construites les lignes invisibles, en y comprenant le quatrième arc du dôme et sans faire usage des points de distance. Entre autres vérifications, les diagonales menées dans les bases des trois corps de bâtiment devraient se couper sur les verticales abaissées des points *i*, *g*, *h*. Mais ce serait un exercice purement théorique.

## § VI.

### MISE EN PERSPECTIVE D'UNE SURFACE COURBE.

**142.** Une surface courbe étant proposée, sa mise en perspective est celle des lignes dont se compose son contour apparent (40), et nous devrons d'abord généralement chercher à déterminer ces lignes daus l'espace. Nous y parviendrons à l'aide de constructions géométrales appropriées à la nature de la surface, et fondées sur quelques-uns des principes de la théorie.

Nous distinguerons ces trois groupes principaux : les surfaces développables, les surfaces fermées par leur nature, ou du moins qui présentent une certaine courbure dans tous les sens et en chacun de leurs points, comme une sphère ou un ellipsoïde; enfin les surfaces gauches. Cette classification sera justifiée par l'analogie des opérations de perspective; mais elle pourrait paraître défectueuse en géométrie pure, où les surfaces développables et les surfaces gauches appartiennent à une même famille, celle des surfaces réglées : d'ailleurs nous réduirons les premières aux cônes et aux cylindres.

Commençons par établir sommairement la manière d'opérer pour chacune de nos trois catégories.

Digitized by Google

*Cônes et cylindres.*

143. Étant donné un cylindre ou un cône, droit ou oblique, à base quelconque, nous obtiendrons ses lignes de contour apparent, en exécutant, par des procédés de géométrie descriptive, une des opérations conçues théoriquement aux n^os 44 et 45. Nous supposerons donc par le point de vue des plans tangents à la surface, et nous aurons à déterminer leurs arêtes de contact, puisque ces droites doivent composer, avec l'arc ou les arcs interceptés des bases, le contour demandé. Dans ce but, admettons d'abord, ce qui est le cas le plus ordinaire, que la surface soit donnée par la position de sa base dans un plan parallèle à l'un des plans coordonnés, et par la position de son sommet ou la direction de sa génératrice, s'il s'agit d'un cylindre.

Prenant pour géométral le plan de la base donnée, nous mènerons par le point de vue une droite allant au sommet du cône ou parallèle à la génératrice du cylindre, et nous construirons par un rabattement le point où elle rencontre le plan géométral. De ce point, nous tirerons des tangentes à la base, et leurs contacts détermineront les arêtes de contact.

Ces arêtes et les arcs visibles des bases étant ainsi obtenus dans l'espace, leur mise en perspective rentre dans ce qui est établi pour des droites ou des courbes planes. On peut opérer individuellement pour chaque base d'un cylindre, ou les faire dépendre l'une de l'autre, en considérant les points de la seconde comme les extrémités des arêtes qui passent par les points de la première.

Maintenant, si l'on suppose à la base donnée une direction quelconque par rapport aux plans coordonnés, il serait facile de ramener l'opération à la précédente, en construi-



Digitized by Google

sant l'intersection de la surface avec un plan parallèle à l'un de ces derniers plans, et faisant de cette intersection la base de la surface; mais nous trouverons préférable de conserver la base primitive, et d'effectuer la construction qui détermine les points de contact à l'aide de quelques rabattements, comme on le verra ci-après.

Nous devrons nous rappeler, dans tous les cas, que les arêtes de contour apparent doivent être, sur le tableau, tangentes aux arcs interceptés des bases (44). Cette propriété abrége l'opération, quand on tient peu à l'exactitude. On met en perspective les bases du cylindre, ou la base et le sommet du cône, et l'on tire à vue d'œil des tangentes. Mais, en général, nous construirons directement les points de contact.

La construction suppose toujours des tangentes menées de quelque point dont la position dépend de celle du point de vue. Nous ne pourrons en conséquence diminuer, sur l'épure, la distance du plan central à la surface proposée (102). Mais rien n'empêche d'exécuter sur une autre feuille les constructions qui permettent de rapprocher ce plan, et d'opérer à leur égard sur une plus grande échelle.

Pour rendre ces explications plus sensibles, nous allons les reprendre en figurant le détail des constructions. Nous supposerons les cylindres et les cônes droits, à bases circulaires, comme les cas les plus usuels.

144. *Cylindre vertical* (*fig.* 66). Soient ABCD la base donnée d'un cylindre vertical, et O la projection du point de vue sur le plan de cette courbe. Il est clair que c'est en O qu'une parallèle à la génératrice du cylindre, menée par le point de vue, rencontre le plan de la base. Nous tirons donc les deux tangentes $O\alpha$, $O6$, dont les contacts $\alpha$, 6, sont les points où doivent passer les arêtes de contour

Digitized by Google

apparent. L'arc $\alpha C \beta$ est la seule portion visible de la courbe, si du moins le point de vue est au-dessus de son plan.

Cette construction coïncide avec celle qui donne les points latéraux de la perspective de la base, comme cela devait être.

145. *Cylindre horizontal* (*fig.* 87). Soient, sur un plan géométral quelconque, $A_1B_1E_1F_1$ le rectangle qui représente la projection d'un cylindre ayant ses arêtes horizontales; MN la trace du plan de sa base; ADBC le rabattement de la base sur le plan géométral, ou plutôt cette base elle-même dans son plan considéré comme plan vertical de projections; O′ la projection verticale du point de vue. Ces éléments du problème sont donnés ou faciles à obtenir. Cela posé, nous tirons les tangentes $O'\alpha$, $O'\beta$, et leurs contacts $\alpha$, $\beta$ sont les extrémités des arêtes de contour. Les projections verticales de ces droites se réduisent à ces deux points, tandis que leurs projections horizontales sont les droites $\alpha_1\gamma_1$, $\beta_1\delta_1$, perpendiculaires à MN et de la longueur que doit avoir le cylindre.

Nous avons supposé un plan géométral quelconque; on trouverait de l'avantage à prendre le plan d'horizon, parce que le point O′ serait alors sur MN; ou bien à le faire passer par le centre de la base, comme nous le ferons pour le cône, dans un cas analogue.

146. *Cylindre incliné sur l'horizon* (*fig.* 88). Soient, sur le plan d'horizon pris pour géométral, MN la trace du plan de la base du cylindre; ABCD le rabattement de cette courbe; PQ la ligne de terre d'un plan vertical de projections perpendiculaire à MN; PG la trace verticale du plan de la base, de sorte que l'angle QPG représente l'inclinaison du plan; O le point de vue et O′ sa projection verticale, située sur la ligne de terre. Nous tirons du point de



Digitized by Google

vue la droite (OK, O'K') parallèle à la génératrice, c'est-à-dire perpendiculaire au plan de la base, puisque le cylindre est droit : à cet effet (234), il suffit de diriger les lignes OK, O'K', qui sont les projections de cette parallèle, perpendiculairement à MN et PG. Nous construisons ensuite le point K, rabattement du point où la même droite rencontre le plan de la base, comme l'indique la figure, et nous tirons les tangentes K$\alpha$, K$\beta$ : leurs contacts $\alpha$, $\beta$, sont les rabattements des points où doivent aboutir les arêtes de contour. Par un relèvement du plan, nous obtenons ces points dans leur véritable position, savoir ($\alpha_1$, $\alpha'$), ($\beta_1$, $\beta'$). Les arêtes de contour s'ensuivent, ($\alpha_1\gamma_1$, $\alpha'\gamma'$), ($\beta_1\delta_1$, $\beta'\delta'$) : les projections verticales de ces droites sont, en effet, déterminées par la condition d'être perpendiculaires à PG et de même longueur que le cylindre ; et les perpendiculaires à la ligne de terre, abaissées de leurs extrémités $\delta'$, $\gamma'$, limitent les projections horizontales.

L'opération par laquelle nous avons relevé les points $\alpha$, $\beta$ doit être répétée pour les divers points que l'on prendra sur la courbe ABCD, afin d'en conclure cette courbe dans l'espace, et par suite son opposée ; c'est la même que nous avons appliquée à un parallélipipède. Dans la disposition que suppose la figure, $\alpha$A$\beta$ est l'arc visible de l'une des bases, et l'on opérerait seulement sur cet arc, si l'autre base ne devait pas être totalement visible.

On comprendra comment les constructions se modifieraient pour un plan géométral différent de celui d'horizon.

Dans le cas où plusieurs cylindres ont un même axe, on peut les considérer comme ayant leurs bases dans un même plan perpendiculaire à l'axe commun, et déterminer par une même opération toutes les arêtes de contour apparent.

147. *Cône vertical* (*fig.* 89 et 90). Un cône ayant son

Digitized by Google

axe vertical, soient ABC sa base, dont le plan est pris pour géométral, le centre étant en I; O la projection du point de vue; O′ et S les rabattements du point de vue et du sommet du cône, en supposant qu'ils aient tourné autour de OI. La droite O′S, ou son prolongement, rencontre la direction OI en un point K, duquel nous tirons les tangentes K$\alpha$, K$\beta$ : leurs contacts appartiennent aux arêtes de contour apparent; la première figure suppose le sommet plus élevé que le point de vue, la plus grande portion de la surface étant en conséquence invisible (45): c'est le contraire dans la seconde.

148. *Un cône ayant son axe horizontal* (*fig.* 91). Le plan horizontal qui contient l'axe de la surface étant pris pour géométral, soient ASB le triangle qui représente la projection horizontale du cône; MN la trace du plan de sa base; ABCD cette courbe dans son plan considéré comme plan vertical de projection; O la projection géométrale du point de vue. Nous tirons OS et construisons le rabattement O′ de ce point, le mouvement de révolution étant conçu autour de OS. Du point $K_1$, rencontre de cette droite avec MN, nous élevons la perpendiculaire $K_1K'$ et obtenons sur O′S le point K′, rabattement de celui où le rayon visuel du sommet du cône rencontre le plan de la base. La droite $K_1K'$, relevée, prend la position $K_1K$ perpendiculaire à la ligne de terre, dans le plan vertical de projections. Nous tirons enfin les tangentes K$\alpha$, K$\beta$, qui nous donnent les points cherchés $\alpha$, $\beta$. Ces points sont eux-mêmes leurs projections verticales, et ils se projettent horizontalement en $\alpha_1$, $\beta_1$, sur la ligne de terre. Le centre de la base étant en I, les arêtes de contour ont pour projections verticales I$\alpha$, I$\beta$, et pour projections horizontales S$\alpha_1$, S$\beta_1$; mais il n'y a ici aucune nécessité de tracer ces projections

Digitized by Google

On trouvera dans l'Appendice la manière d'opérer pour un cône dont l'axe est incliné sur l'horizon.

149. *Tronc de cône* (*fig.* 92). Les bases d'un tronc de cône étant supposées parallèles et horizontales, soient ABCD la base inférieure et la plus petite; EFGH la projection de la base supérieure sur le plan de la première, dont nous faisons le géométral; I le centre commun des deux cercles; O la projection du point de vue. Nous construisons le trapèze IPQR, rabattement d'une demi-section faite dans la surface par un plan vertical conçu suivant OI: nous avons tous les éléments nécessaires à la construction de ce trapèze, parce qu'on donne la hauteur du tronc de cône. Les directions PI, QR se rencontrent en un point S, qui est le rabattement du sommet du cône entier. Ce point une fois obtenu, nous achevons l'opération comme au n° 147, pour un cône vertical. Ainsi, nous construisons le rabattement O′ du point de vue, en le supposant obtenu par le même mouvement de révolution que le précédent; nous tirons O′S rencontrant OI en K, et les tangentes K$\alpha$, K$\beta$ à la petite base. Les droites $\alpha\gamma_1$, $\beta\delta_1$, dirigées vers le point I et comprises entre les cercles, sont les projections des arêtes de contour apparent, lesquelles se trouvent complétement déterminées, puisque nous connaissons les élévations verticales des points qui se projettent en $\gamma_1$ et $\delta_1$.

Pour un tronc de cône à bases non parallèles, de même que pour un tronc de cylindre, l'opération dépend du problème de l'intersection d'un cône ou d'un cylindre par un plan, résolu dans l'Appendice.

*Surfaces fermées.*

150. Les surfaces non réglées, dont toutes les sections sont des lignes courbes, peuvent néanmoins, d'après leur nature particulière, être susceptibles de s'é endre à l'infini;

Digitized by Google

telles sont, entre autres, celles que l'on nomme *paraboloïde elliptique, hyperboloïde à deux nappes*, etc. Mais nous considérons plus spécialement celles qui reviennent sur elles-mêmes et forment des enveloppes fermées, lorsque dans leur génération elles sont exemptes de toute solution de continuité.

Une surface de cette espèce devant être mise en perspective, il est avantageux d'obtenir à priori les points culminants et latéraux de son contour apparent. Or, nous avons établi en théorie (40) les moyens de les déterminer dans l'espace : en faisant usage de notre système de coordonnées, ils consistent à concevoir des plans tangents à la surface, passant respectivement par l'axe des X et celui des Z, et à construire les points de contact.

A la vérité, si la surface est donnée dans une position quelconque, la construction de ces points de contact peut devenir une opération fort laborieuse, qu'il serait même hors de propos d'employer ; mais elle est facile pour une surface de révolution dont l'axe est perpendiculaire à l'un des plans coordonnés, et c'est un cas fréquent dans la pratique.

Supposons, par exemple, une surface de révolution dont l'axe soit vertical. Nous construirons sur le plan normal la projection d'une section méridienne parallèle à ce plan, et sur un plan horizontal quelconque les limites des projections de toutes les nappes de la surface auxquelles on peut concevoir des plans tangents verticaux : ces limites seront des cercles concentriques correspondants à des cercles de la surface dont nous connaîtrons généralement les élévations et, par suite, les projections verticales. Cela posé, nous tirerons du point de vue des tangentes à la projection verticale de la section méridienne, et les contacts seront les projections verticales des points qui doivent être culminants en perspective ; leurs projections horizontales s'en-

Digitized by Google

suivront, puisqu'elles seront situées sur la trace horizontale du plan méridien. De même, des tangentes menées de la projection horizontale du point de vue à tous les cercles concentriques ci-dessus détermineront, par leurs contacts, les projections horizontales des points qui doivent devenir latéraux; leurs projections verticales se trouveront sur celles des cercles correspondants de la surface.

Dans le cas où la surface n'aura pas de parties rentrantes, elle ne donnera qu'un cercle sur le plan horizontal et une courbe convexe sur le plan normal : il n'y aura que deux points latéraux et deux culminants.

Si le plan d'horizon est pris pour géométral, toutes les tangentes seront menées du point de vue lui-même, c'est-à-dire du point où se croisent les axes sur l'épure.

On obtiendrait encore sans difficulté les points latéraux, si l'axe de révolution était horizontal, d'ailleurs de direction quelconque; mais il en serait autrement des points culminants qu'on pourrait en conséquence négliger. Du reste, je renvoie pour cet objet au problème des plans tangents, en géométrie descriptive.

151. A la suite de cette construction, lorsque nous l'aurons jugée convenable, nous chercherons à déterminer un nombre suffisant d'autres points de la ligne de contour apparent. Dans ce but, voici d'abord quelle est la méthode générale, celle dont l'idée se présente naturellement. On conçoit, par le point de vue, une suite de plans sécants, d'ailleurs arbitraires, par exemple une suite de plans verticaux; on construit eu projections, ou par leurs rabattements, les courbes d'intersections; du point de vue, on mène des tangentes à ces courbes, et les contacts sont autant de points de la courbe demandée, parce que ces tangentes représentent autant de rayons visuels effleurant la surface. Il ne reste donc qu'à mesurer les coordonnées de ces points,

Digitized by Google

pour les mettre en perspective. Cette méthode a l'avantage de s'appliquer, sans exception, à toutes les espèces de surfaces ; mais les courbes auxiliaires dont elle suppose la construction ne sont pas généralement de la nature de celles que l'on peut décrire d'un mouvement continu ; elles ne se déterminent elles-mêmes que par des points obtenus successivement, et l'opération, si simple et si naturelle en théorie, devient complexe dans la pratique.

Les propriétés des n$^{os}$ 47 et 48 nous fournissent heureusement deux autres méthodes applicables à la plupart des surfaces considérées dans les questions usuelles, particulièrement aux surfaces de révolution. Elles n'ont pas les inconvénients de la première, et nous les pratiquerons habituellement. Peu de mots suffiront pour les exposer.

152. *Méthode des cônes enveloppes* (*). Étant donnée une surface de révolution, nous la couperons par une suite de plans perpendiculaires à son axe. Nous considérerons chaque section comme la base d'un cône tangent à la surface, et dont le sommet, situé sur l'axe de révolution, sera facile à déterminer. Nous construirons, par le procédé du n° 147, les points de la base du cône où passeraient les arêtes de son contour apparent ; ces points appartiendront au contour de la surface proposée.

153. *Méthode des enveloppes perspectives*. Étant encore donnée une surface de révolution, nous la couperons, comme précédemment, par une suite de plans perpendiculaires à son axe ; mais nous mettrons en perspective les sections elles-mêmes, et nous tracerons sur le tableau une

(*) Une surface de révolution, considérée comme résultant des intersections successives des cônes qui lui sont tangents, serait elle-même leur *enveloppe*, selon la définition de Monge ; j'adopte en quelque sorte la définition inverse, parce qu'elle semble ici plus naturelle. Au reste, le nom de la méthode n'est pas ce qui importe.

Digitized by Google

courbe tangentiellement à toutes les ellipses ainsi obtenues; cette courbe pourra être à plusieurs branches, dont chacune sera, relativement aux ellipses, enveloppante ou enveloppée, selon qu'elle représentera une ligne de contour intérieure ou extérieure à la surface.

Le cas le plus favorable est celui où l'axe de révolution est perpendiculaire au plan central, parce que les sections sont des cercles aussi bien sur le tableau que dans l'espace. Mais dans le cas le plus général, il suffira souvent de construire les extrémités de deux diamètres de chaque ellipse, du moins quand le tracé plus ou moins exact de ces courbes n'aura que peu d'influence sur la courbe cherchée.

Cette méthode est susceptible de s'appliquer à toutes les espèces de surfaces, lorsqu'en les coupant par une suite de plans, on peut sans trop de difficultés construire les sections sur le tableau. On peut aussi, au lieu de sections faites par des plans parallèles, considérer la génératrice dans une suite de positions suffisamment rapprochées, et la mettre en perspective dans ces positions : la courbe de contour sera tracée tangentiellement à toutes les lignes successivement obtenues. Entre les divers modes de génération d'une même surface, on choisirait le plus favorable.

La méthode des cônes enveloppes exige, en général, plus de constructions sur l'épure; mais elle a sur la dernière l'avantage de donner directement les points dont se compose la ligne de contour. Elle doit être préférée, quand on veut déterminer avec une certaine précision les points de désinence et les parties délicates des diverses branches de cette courbe.

Nous résumerons ces préceptes en figurant pour quelques exemples le détail des opérations, et nous commencerons par ce qui concerne les points latéraux ou culminants.

Digitized by Google

154. *Points latéraux et culminants sur une sphère* (*fig.* 93). La surface étant projetée sur un plan horizontal quelconque et sur le plan normal, soient ABC, EFG ses projections; O et O′ celles du point de vue. Nous tirons les tangentes $O\alpha$, $O\beta$, $O'\gamma'$, $O'\delta'$: les contacts $\alpha$, $\beta$ sont les projections horizontales de deux points de la sphère qui se projettent verticalement en $\alpha'$, $\beta'$, sur le diamètre GE parallèle à OZ. Pareillement, $\gamma'$, $\delta'$ sont les projections verticales de deux autres points se projetant horizontalement en $\gamma$, $\delta$. Les premiers $(\alpha, \alpha')$, $(\beta, \beta')$, mis en perspective, seront les points latéraux, et les deux autres $(\gamma, \gamma')$, $(\delta, \delta')$ les points culminants.

155. *Les mêmes points sur un tore* (*fig.* 94). Soient ABC, EFG les deux cercles qui limitent la projection de la surface sur un plan horizontal quelconque; KMN, PQR les projections sur le plan normal des deux cercles générateurs parallèles à ce plan; O et O′ les projections analogues du point de vue. Nous tirons les tangentes $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$, d'où résultent les points $(\alpha, \alpha')$, $(\beta, \beta')$, $(\gamma, \gamma')$, $(\delta, \delta')$, latéraux en perspective. Les tangentes $O'\varepsilon'$, $O'\varphi'$, $O'\theta'$, $O'\psi'$, détermineront de même les points culminants $(\varepsilon, \varepsilon')$, $(\varphi, \varphi')$, $(\theta, \theta')$, $(\psi, \psi')$.

156. *Méthode générale appliquée à une sphère* (*fig.* 95). Pour construire par la méthode générale du n° 151 le contour apparent d'une sphère, nous ferons passer le plan géométral par le centre de la surface. Soient ABC le grand cercle contenu dans ce plan, et O la projection du point de vue. La surface sera coupée par une suite de plans se croisant suivant l'axe des Y, et nous supposerons que la trace de l'un d'eux soit la droite OMN, rencontrant le cercle en M et N. La section est un cercle du diamètre MN, et nous construisons son rabattement MEN, ainsi que le

Digitized by Google

rabattement O′ du point de vue. Nous tirons les tangentes O′$\alpha$, O′6, dont les contacts sont deux points du contour apparent de la surface. Nous en concluons les projections $\alpha_1$, $6_1$, de ces points relevés dans le plan vertical, et leurs distances $\alpha\alpha_1$, $66_1$, au géométral.

Il est intéressant de remarquer que les points fournis par chaque plan sécant se trouveront en perspective sur une même verticale, si l'opération est exacte.

157. *Méthode des cônes enveloppes appliquée à un tore* (*fig.* 96). Nous simplifierons notablement, en faisant encore passer le plan géométral par le centre du tore, dont l'axe est supposé vertical. Soient ABC, EFG les deux cercles concentriques en I, qui limitent la projection horizontale de la surface, ou représentent son intersection par le géométral. Nous tirons la droite indéfinie OIJ, dont nous faisons la ligne de terre d'un plan vertical de projections, et nous construisons dans ce plan le point de vue O′, ainsi que le cercle générateur ACE.

La surface devant être coupée par une suite de plans horizontaux, soit MN la trace verticale de l'un d'eux, de sorte que la distance de cette droite à la ligne de terre mesure l'élévation attribuée au plan sécant au-dessus du géométral, ou son abaissement au-dessous. La section se composera de deux cercles, qui seront considérés comme les bases de deux cônes tangents au tore, et il s'agira de construire les points de leurs circonférences où aboutissent leurs arêtes de contour apparent : les points situés sur le plus grand des deux cercles appartiendront à une branche de contour extérieur de la surface, et ceux du plus petit, à une branche de contour intérieur.

Or, la trace MN coupe le cercle ACE en deux points P et Q, se projetant horizontalement en $P_1$ et $Q_1$, sur la ligne de terre; les cercles décrits du centre I, avec les

Digitized by Google

rayons $IP_1$, $IQ_1$, sont les projections horizontales de ceux que nous concevons dans l'espace : occupons-nous d'abord du premier.

Une tangente PS au cercle ACE détermine, par sa rencontre avec la perpendiculaire IS à la ligne de terre, le point S, sommet du cône tangent au tore suivant le cercle extérieur de la section ; ce point S détermine lui-même la droite O'SK, rayon visuel du sommet du cône, rencontrant le plan de la base en un point K, dont nous construisons la projection horizontale $K_1$. Nous tirons à la projection horizontale du cercle les tangentes $K_1\alpha$, $K_1\beta$, et obtenons les points $\alpha$, $\beta$, projections de ceux où aboutissent les arêtes de contour, c'est-à-dire, comme nous l'avons établi, des deux points à trouver sur le contour extérieur du tore. Nous connaissons d'ailleurs leurs élévations verticales.

De même, une tangente QT, menée par le point Q au cercle ACE, nous donne le point T, sommet du cône tangent suivant le cercle intérieur. La droite O'T, rencontrant MN en H, détermine le point (H, $H_1$), et les tangentes $H_1\gamma$, $H_1\delta$, les points $\gamma$, $\delta$, projections horizontales de deux points de la branche de contour intérieur.

L'opération se compliquerait dans ses détails, si l'axe de révolution avait une direction quelconque dans l'espace : on emploierait des rabattements, ou autres moyens que suggère l'habitude des constructions de géométrie descriptive, selon les circonstances. Mais elle est toujours très-praticable.

158. *Méthode des enveloppes perspectives à un tore* (*fig.* 97). Nous supposerons encore l'axe de révolution vertical ; mais le choix du plan géométral étant ici assez indifférent, nous admettrons la même disposition que dans la *fig.* 94. Or, la méthode prescrit de couper par une série de

Digitized by Google

plans horizontaux, et nous obtenons sans difficulté les sections par leurs projections. C'est ainsi que le plan dont la trace verticale est MN donne, sur le géométral, les deux cercles des rayons $IP_1$ et $IQ_1$. Mais, les sections devant être mises en perspective, il convient de déterminer leurs points culminants et latéraux. Nous savons que les premiers sont, en projections horizontales, les extrémités des diamètres parallèles à l'axe des Z, ou les intersections des cercles avec la droite AC. Les seconds sont les points de contact des tangentes menées de la projection horizontale du point de vue; et il est évident que nous obtiendrons à la fois tous ces points de contact comme les intersections des projections horizontales des sections avec le cercle décrit sur OI comme diamètre.

Il est avantageux, quand on opère sur une surface douée d'un centre, telle que le tore, de prendre des plans sécants symétriques par rapport à ce point, de manière que les sections de chaque couple symétrique aient une même projection horizontale.

159. *La même méthode à un ellipsoïde* (*fig.* 98). Nous supposerons l'axe de révolution horizontal, et ferons passer le plan géométral par cette droite. Soient, dans cette hypothèse, ABCD l'ellipse, intersection de la surface par le géométral, ou la limite de sa projection sur le plan; O la projection du point de vue. Les sections seront perpendiculaires sur AC, et chacune d'elles sera mise en perspective comme un cercle vertical de position donnée. Ainsi, une droite telle que MN représentera la trace de l'un de ces plans, en même temps que le diamètre horizontal de la section; les extrémités M, N de ce diamètre seront des points latéraux. Concevant le plan sécant rabattu autour de sa trace, nous construisons le rabattement O′ du point où l'axe des X rencontrait ce plan, et nous tirons au rabattement de la section

Digitized by Google

les tangentes $O'\alpha$, $O'\beta$. Leurs contacts seront les rabattements des points culminants de cette courbe ; leurs projections horizontales $\alpha_1$, $\beta_1$ s'ensuivent.

Nous observerons ici que l'on ne peut déterminer à la fois tous les points de contact analogues aux précédents, comme dans le cas où l'axe de révolution est vertical. La construction doit être répétée pour chaque section en particulier. Mais on pourrait trouver suffisant d'employer, avec les points latéraux, les extrémités des diamètres verticaux des sections, tels que celui qui se projette en K, et la construction deviendrait fort simple ; elle se réduirait à prendre sur l'épure les coordonnées des points M, N, K et leurs analogues, avec les grandeurs des rayons.

Au sujet de l'ellipsoïde, puisque nous l'avons pris pour exemple, nous ajouterons une remarque : on démontre par la géométrie analytique que la ligne de contour apparent de cette surface est plane et forme elle-même une ellipse ; sa perspective est une autre ellipse dont on connaîtrait le centre dès qu'on aurait ses points latéraux, et l'on pourrait se servir de ces points pour la construction, comme nous l'avons fait à l'égard de la perspective d'un cercle.

Enfin, si l'on voulait appliquer la méthode à une surface de révolution ayant une direction quelconque dans l'espace, on la projetterait sur un plan vertical parallèle à son axe. La trace verticale de chaque plan sécant donnerait, par son intersection avec cette projection, la position du centre et la grandeur du rayon de la section, qu'on mettrait en perspective comme un cercle connu de grandeur et de position.

*Surfaces gauches.*

160. Les surfaces gauches, ainsi que toutes les surfaces réglées, ont par elles-mêmes une étendue indéfinie ; mais, employées dans les arts, elles peuvent être comprises entre

Digitized by Google

certaines limites, et ne sont plus véritablement que des portions de surfaces géométriques. Or, nous n'avons pas à nous occuper du cas où les lignes qui limitent ainsi une surface de cette nature se trouvent totalement visibles, puisque alors l'opération de perspective s'applique uniquement à ces lignes, dont la position est censée connue. Nous supposerons donc la surface tellement placée par rapport au point de vue, qu'une portion de son contour apparent provienne de sa courbure, et cette portion du contour est la seule que nous considérons actuellement.

En général, la ligne de contour due à la courbure de la surface est une courbe dont on pourrait déterminer la position dans l'espace par la première méthode indiquée au n° 151 et appliquée ci-dessus à une sphère. Mais les sections sont rarement circulaires dans les surfaces de cette espèce; on ne les construit généralement que par points, et nous préférerons en conséquence obtenir sur le tableau la courbe de contour comme une enveloppe perspective. A cet effet, nous prendrons un certain nombre de positions consécutives de la génératrice, dans le voisinage présumé de cette courbe; nous mettrons en perspective la génératrice considérée dans chacune de ces positions, et nous tracerons sur le tableau une ligne continue, tangentiellement à toutes celles qu'aura données l'opération.

La pratique de cette méthode permet de rapprocher le plan central des constructions de l'épure.

Nous allons maintenant faire des applications numériques, qui se rapporteront successivement à nos trois catégories.

UN CONE VERTICAL. (*Fig.* 99.)

161. *Un cône droit, dont l'axe est vertical, a* 9 *mètres de hauteur; le rayon de sa base est de* 5 *mètres, et le*

Digitized by Google

*centre de cette courbe est ainsi donné :*

$$I \begin{cases} X = -\ 7^{m}, \\ Y = -\ 6, \\ Z = \ \ 18. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Suivant ce qui a été prescrit (143), nous déterminons géométralement les points $\alpha$, $\beta$ de la circonférence de la base où doivent aboutir les arêtes de contour apparent. Pour construire l'arc visible de la base, nous en prenons un nombre convenable d'autres points, notamment le point C, extrémité du diamètre perpendiculaire au tableau, et dont les coordonnées résultent de l'énoncé, et les points G, H, à 45 degrés du précédent. Nous négligeons les points latéraux, parce qu'ils doivent être très-voisins de $\alpha$ et $\beta$ : nous évitons, pour la même raison, de faire usage du diamètre parallèle au tableau. Quant au sommet du cône, sa position est connue.

*Résultat géométral.*

$$\alpha \begin{cases} X = -\ 11^{m},586 \\ Z = \ \ 16,008 \end{cases} \quad \beta \begin{cases} X = -\ 2,136 \\ Z = \ \ 19,158 \end{cases}$$

$$G \begin{cases} X = -\ 10,536 \\ Z = \ \ 14,464 \end{cases} \quad H \begin{cases} X = -\ 3,464 \\ Z = \ \ 14,464. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

$$\alpha \begin{cases} x = -\ 1447^{mm} \\ y = -\ 750 \end{cases} \quad \beta \begin{cases} x = -\ 223 \\ y = -\ 626 \end{cases} \quad c \begin{cases} x = -\ 1077 \\ y = -\ 923 \end{cases}$$

$$g \begin{cases} x = -\ 1457 \\ y = -\ 830 \end{cases} \quad h \begin{cases} x = -\ 479 \\ y = -\ 830 \end{cases} \quad s \begin{cases} x = -\ 778 \\ y = \ \ 333. \end{cases}$$

Les points $\alpha$, $\beta$, $s$, étant construits sur le tableau, nous tirons les droites $s\alpha$, $s\beta$, auxquelles nous rattachons tan-



Digitized by Google

gentiellement l'arc elliptique $\alpha gch\beta$, cet arc devant avoir en $c$ une direction horizontale.

La figure résultant de cette construction peut paraître déjetée, parce que, d'après les éléments du problème, les rayons visuels s'écartent très-inégalement de l'axe de perspective; mais le spectateur placé au point de vue du tableau verra un cône parfaitement droit.

UN AUTRE CONE VERTICAL. (*Fig.* 100.)

162. *La hauteur de ce cône égale* 12 *mètres, le rayon de sa base* 6 *mètres, et le sommet est ainsi donné:*

$$\mathrm{I}\begin{cases} X = \overset{m}{10}, \\ Y = -\ 8, \\ Z = 44. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 5 *mètres.*

La construction géométrale est celle du numéro précédent, ou du moins elle n'en diffère qu'en ce que le point de vue est ici plus élevé que le sommet du cône: la plus grande partie de la surface convexe sera donc visible (45). Nous désignerons par $\alpha$, $\beta$, C, G, H, les points analogues à ceux que désignaient les mêmes lettres pour le premier cône, en y ajoutant les extrémités du diamètre AB de la base, qui est dirigé parallèlement au tableau. Nous négligeons d'ailleurs les points latéraux de cette courbe.

*Résultat géométral.*

$$\alpha\begin{cases} X = \overset{m}{4},290 \\ Z = 45,843 \end{cases} \quad \beta\begin{cases} X = 15,946 \\ Z = 43,194 \end{cases} \quad G\begin{cases} X = 5,757 \\ Z = 39,757. \end{cases}$$

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

$$\alpha \begin{cases} x = 468 \\ y = -2182 \end{cases} \quad \beta \begin{cases} x = 1844 \\ y = -2315 \end{cases} \quad c \begin{cases} x = 1316 \\ y = -2632 \end{cases}$$

$$g \begin{cases} x = 724 \\ y = -2515 \end{cases} \quad h \begin{cases} x = 1789 \\ y = -2515 \end{cases} \quad a \begin{cases} x = 454 \\ y = -2273 \end{cases}$$

$$b \begin{cases} x = 1818 \\ y = -2273 \end{cases} \quad s \begin{cases} x = 1136 \\ y = -909. \end{cases}$$

La construction de la perspective se réduit encore à celle des deux droites $s\alpha$, $s\beta$, et de la courbe $\alpha c\beta$.

UN CONE HORIZONTAL. (*Fig.* 101.)

163. *Un cône, dont l'axe est horizontal, a* 4 *mètres de hauteur et* 1 *mètre de rayon à sa base; la déclinaison de son axe est de* 45 *degrés, de sens tel qu'à partir de la base il s'éloigne de gauche à droite. On donne pour le centre du cercle :*

$$\mathrm{I} \begin{cases} X = -\ \overset{m}{4}, \\ Y = -\ 4, \\ Z = \ 18. \end{cases}$$

*La distance centrale* $= 3^m,6$.

Ce problème rentre dans le cas spécial du n° 148, où la construction est expliquée par la *fig.* 91. La base du cône devant être totalement visible, nous prendrons sur sa circonférence, avec les points $\alpha$, $\beta$, situés sur les arêtes de contour apparent, les extrémités du diamètre AB horizontal dans l'espace, celles du diamètre vertical CD, et les points G, H, à 45 degrés.



Digitized by Google

*Résultat géométral.*

$$\alpha \begin{cases} X = -\ 4{,}024^{m} \\ Y = -\ 3{,}001 \\ Z = \ \ 18{,}024 \end{cases} \qquad \beta \begin{cases} X = -\ 3{,}680 \\ Y = -\ 4{,}892 \\ Z = \ \ 17{,}680 \end{cases}$$

$$A \begin{cases} X = -\ 4{,}707 \\ Y = -\ 4{,}000 \\ Z = \ \ 18{,}707 \end{cases} \qquad B \begin{cases} X = -\ 4{,}500 \\ Y = -\ 3{,}293 \\ Z = \ \ 18{,}500. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

$$\alpha \begin{cases} x = -804^{mm} \\ y = -599 \end{cases} \quad \beta \begin{cases} x = -\ 749 \\ y = -\ 996 \end{cases} \quad a \begin{cases} x = -906 \\ y = -770 \end{cases}$$

$$b \begin{cases} x = -686 \\ y = -833 \end{cases} \quad c \begin{cases} x = -\ 800 \\ y = -1000 \end{cases} \quad g \begin{cases} x = -876 \\ y = -641 \end{cases}$$

$$h \begin{cases} x = -720 \\ y = -678 \end{cases} \quad s \begin{cases} x = -\ 202 \\ y = -\ 691. \end{cases}$$

Nous construisons avec ces valeurs les arêtes de contour $s\alpha$, $s\beta$, et l'ellipse $\alpha acb\beta$, sur laquelle les points $a$ et $b$ seront latéraux. Mais avant de décrire cette courbe, on peut en obtenir de nouveaux points, par le procédé du n° **121**, notamment les points $d$, $g'$, $h'$, extrémités des verticales $cd$, $gg'$, $hh'$, divisées en parties égales par $ab$. On en déterminerait d'autres en prenant le milieu de $ab$, qui est le centre de l'ellipse, et tirant des diamètres par les points déjà obtenus, comme la figure l'indique seulement pour le point $\beta$.

UN CONE INCLINÉ SUR L'HORIZON. (*Fig.* 102.)

**164.** *La hauteur d'un cône égale* $4^{m},8$, *et le rayon de sa base* 1 *mètre; la déclinaison de son axe est de* 45 *degrés et son inclinaison* $= 3 : 4$, *de sens tels qu'à partir de la*

Digitized by Google

*base il s'éloigne de droite à gauche et monte vers la gauche. Le centre de cette courbe a cette position :*

$$I \begin{cases} X = & 4^{m}, \\ Y = - & 1,5 \\ Z = & 16. \end{cases}$$

*La distance centrale* $= 2^{m},4$.

La construction relative aux arêtes de contour se rapporte au cas général du plan tangent à un cône, par un point donné, dont on trouvera la solution dans l'Appendice. Il sera avantageux de faire passer le plan géométral par le centre de la base, parce que l'on connaîtra immédiatement la trace du plan de cette courbe. Nous emploierons, avec les points $\alpha$, $\beta$, qui déterminent ces arêtes, les extrémités du diamètre horizontal AB ; et les points C, D, le plus haut et le plus bas de la courbe dans l'espace.

*Résultat géométral.*

$$\alpha \begin{cases} X = & 4^{m},600 \\ Y = - & 0,730 \\ Z = & 15,783 \end{cases} \qquad \beta \begin{cases} X = & 3,264 \\ Y = - & 2,177 \\ Z = & 15,981 \end{cases}$$

$$A \begin{cases} X = & 3,293 \\ Y = - & 1,500 \\ Z = & 15,293 \end{cases} \qquad C \begin{cases} X = & 4,424 \\ Y = - & 0,700 \\ Z = & 15,576 \end{cases}$$

$$S \begin{cases} X = & 1,285 \\ Y = & 1,380 \\ Z = & 18,715. \end{cases}$$

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

$$\alpha \begin{cases} x = 700^{mm} \\ y = -117 \end{cases} \quad \beta \begin{cases} x = 490 \\ y = -327 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 517 \\ y = -236 \end{cases}$$

$$b \begin{cases} x = 676 \\ y = -215 \end{cases} \quad c \begin{cases} x = 682 \\ y = -108 \end{cases} \quad d \begin{cases} x = 523 \\ y = -336 \end{cases}$$

$$s \begin{cases} x = 164 \\ y = -177. \end{cases}$$

La construction de la perspective est immédiate et ne donne lieu à aucune remarque nouvelle.

UN TRONC DE CONE. (*Fig.* 103.)

165. *Un tronc de cône, à bases parallèles et horizontales, a 4 mètres de hauteur; le rayon de sa base supérieure égale 3 mètres et celui de sa base inférieure 2 mètres. Pour le centre de celle-ci on a :*

$$I \begin{cases} X = 1^{m}, \\ Y = -6, \\ Z = 18. \end{cases}$$

*La distance centrale = 4 mètres.*

Le plan de la base inférieure étant pris pour géométral, nous déterminons, par l'opération indiquée pour ce cas au n° 149, les points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, qui terminent les arêtes de contour apparent. Pour la détermination des bases, nous n'ajouterons aux précédents que les points B, F, G, extrémités des diamètres perpendiculaires au plan central. Le point S, sommet du cône entier, devant être nécessairement construit sur l'épure, nous le construirons aussi sur le tableau, parce qu'il vérifiera la perspective.

Digitized by Google

*Résultat géométral.*

$$\alpha \begin{cases} X = -\ 0{,}980^{m} \\ Z = \ \ 17{,}721 \end{cases} \quad \beta \begin{cases} X = \ \ 2{,}987 \\ Z = \ \ 17{,}703 \end{cases}$$

$$\gamma \begin{cases} X = -\ 1{,}971 \\ Z = \ \ 17{,}582 \end{cases} \quad \delta \begin{cases} X = \ \ 3{,}906 \\ Z = \ \ 17{,}255 \end{cases} \quad S \begin{cases} Y = -14. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

$$\alpha \begin{cases} x = -\ 221^{mm} \\ y = -1354 \end{cases} \quad \beta \begin{cases} x = \ \ 671 \\ y = -1391 \end{cases} \quad \gamma \begin{cases} x = -448 \\ y = -455 \end{cases}$$

$$\delta \begin{cases} x = \ \ 905 \\ y = -\ 464 \end{cases} \quad b \begin{cases} x = \ \ 250 \\ y = -1500 \end{cases} \quad f \begin{cases} x = \ \ 267 \\ y = -537 \end{cases}$$

$$g \begin{cases} x = \ \ 190 \\ y = -\ 381 \end{cases} \quad s \begin{cases} x = \ \ 222 \\ y = -3111. \end{cases}$$

La perspective étant construite, les directions $\gamma\alpha$, $\delta\beta$, $fb$ doivent se trouver concourir en $s$, tandis que $fg$ ira au centre perspectif.

UN TRONC DE CYLINDRE. (*Fig.* 104.)

166. *La base d'un tronc de cylindre est un cercle horizontal ayant* 1 *mètre de rayon : il est tronqué par un plan qui rencontre l'axe en* I', *à* 5 *mètres au-dessus de la base : la déclinaison et l'inclinaison de ce plan sont de* 45 *degrés, de sens tels qu'il est ascendant vers la droite et s'éloigne vers la gauche. On donne pour le centre de la base :*

$$I \begin{cases} X = \ \ 2{,}5^{m} \\ Y = -\ 3, \\ Z = \ \ 12. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Nous déterminons sans difficulté (143) les points $\alpha'$, $\beta'$ de la circonférence de la base où doivent aboutir les arêtes de

Digitized by Google

contour apparent. Nous obtenons ensuite leurs longueurs $\alpha'\alpha$, $6'6$, en construisant leurs intersections $\alpha'$, $6'$ avec le plan de la section du cylindre : à cet effet, nous commençons par construire la trace de ce plan dans le géométral qui sera, si l'on veut, le plan de la base; et, dans cette hypothèse, l'opération se réduit à mener par le point I une perpendiculaire à la direction que doit avoir cette trace, de la longueur de II′ ou de 5 mètres, et par son extrémité la trace elle-même. Nous abaissons des points $\alpha'$, $6'$, déterminés sur l'épure, des perpendiculaires à cette dernière droite, et leurs longueurs seront celles qu'il s'agissait d'obtenir, ce qui résulte de ce que l'inclinaison du plan sécant est de 45 degrés. Les points $\alpha$, $6$ de la section sont latéraux.

Pour connaître d'autres points de la même courbe, nous avons à résoudre le problème de l'intersection d'un cylindre vertical par un plan (243). En conséquence, nous coupons la surface par une suite de plans horizontaux : chaque section faite dans le plan donné est une droite dont les rencontres avec le cylindre appartiennent à la courbe demandée; et nous rendons la construction fort simple en employant un plan vertical de projections perpendiculaire au plan donné, comme on en voit le détail au numéro cité. Obligé de fixer la position des plans sécants horizontaux, nous choisissons ceux qui contiennent les deux sommets de l'ellipse dans l'espace, c'est-à-dire ses deux points le plus bas et le plus haut; ceux qui passent par son centre I′, à $0^m,5$ au-dessous et à $0^m,7$ au-dessus du centre. Les points résultants seront respectivement désignés par les lettres A et B, C et D, E et F, G et H.

Nous avons déjà les points latéraux de la courbe : il est intéressant de déterminer aussi ses points culminants. Dans ce but, nous pourrions appliquer le procédé général du n° 118, dont nous avons fait usage en particulier pour le

Digitized by Google

cercle. Ainsi, prenant pour géométral le plan d'horizon, c'est-à-dire considérant comme ce dernier plan celui de l'épure où nous avons déjà opéré, nous y construirions la nouvelle trace du plan proposé, le rabattement de la courbe, et du point de rencontre de la trace avec l'axe des X, nous mènerions des tangentes : les points de contact seraient ensuite relevés. Il est facile d'ailleurs de reconnaître, d'après les données particulières de la question, que ce rabattement serait une ellipse ayant pour ses axes 2 mètres et $2^m \times \sqrt{2}$, et pour centre le rabattement du point I, ce qui permettrait de la tracer à priori.

Mais il y a lieu d'employer ici une méthode plus simple et plus exacte dans ses résultats. Par le point d'intersection de la trace du plan sécant avec l'axe des X, nous concevrons deux plans tangents au cylindre : les rencontres des arêtes de contact et de la courbe seront les points cherchés. En effet, les droites que l'on conçoit allant de ces points de rencontre au point par lequel nous avons mené les plans tangents sont à la fois dans le plan de la courbe et dans ces plans; donc elles sont tangentes à cette courbe; mais ces tangentes sont celles qui déterminent les points culminants. L'opération sur l'épure consiste donc à mener, par le point où l'axe des X coupe la trace du plan sécant, des tangentes au cercle qui représente la trace géométrale du cylindre, et à construire les longueurs des arêtes qui passent par les points de contact, comme nous avons construit celles de $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$. Nous désignerons les nouveaux points par $\gamma$ et $\delta$.

Digitized by Google

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | m | | | | |
| α | X = 1,508 | β | X = 3,459 | γ | X = 1,747 |
| | Y = 1,386 | | Y = 2,478 | | Y = 1,002 |
| | Z = 12,123 | | Z = 11,717 | | Z = 11,341 |
| δ | X = 3,333 | A | X = 1,793 | C | X = 1,793 |
| | Y = 2,980 | | Y = 1,000 | | Y = 2,000 |
| | Z = 12,553 | | Z = 11,293 | | Z = 12,707 |
| E | X = 1,534 | F | X = 2,759 | G | X = 2,490 |
| | Y = 1,500 | | Y = 1,500 | | Y = 2,700 |
| | Z = 12,259 | | Z = 11,034 | | Z = 13,500 |
| H | X = 3,500 | | | | |
| | Y = 2,700 | | | | |
| | Z = 11,990. | | | | |

*Résultat perspectif.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | mm | | | |
| α | $x = 367$ | β | $x = 886$ | $\alpha\alpha' = 1085$ |
| | $y = 343$ | | $y = 634$ | $\beta\beta' = 1402$ |
| γ | $x = 462$ | δ | $x = 792$ | $a$ $x = 476$ |
| | $y = 266$ | | $y = 712$ | $y = 266$ |
| $b$ | $x = 747$ | $c$ | $x = 423$ | $d$ $x = 857$ |
| | $y = 708$ | | $y = 472$ | $y = 531$ |
| $e$ | $x = 375$ | $f$ | $x = 750$ | $aa' = 1063$ |
| | $y = 367$ | | $y = 408$ | $ff' = 1224$ |
| $g$ | $x = 553$ | $h$ | $x = 875$ | |
| | $y = 600$ | | $y = 675$. | |

La construction de la perspective est immédiate. Les droites $ab$, $cd$ se coupent en $i'$, point correspondant au centre de l'ellipse dans l'espace; tandis que $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ doivent se diviser mutuellement en parties égales dans un autre point, qui est le centre de l'ellipse sur le tableau, et dont

Digitized by Google

on peut se servir pour augmenter le nombre des points qui déterminent la courbe.

UNE TOURELLE. (*Fig.* 105.)

167. *La base de l'édifice est un cercle du rayon de* 3 *mètres et situé à* 4 *mètres au-dessous du plan d'horizon. On donne pour son centre*

$$I \begin{cases} X = 1^{m}, \\ Z = 20. \end{cases}$$

*La hauteur de la muraille égale* 7 *mètres. Le toit est un cône haut de* 4 *mètres. On y remarque une fenêtre dont le bord inférieur* EL *est un arc de* 30 *degrés de la base du cône. La saillie de la fenêtre est formée de deux plans verticaux surmontés de deux plans inclinés de* 45 *degrés sur l'horizon. La hauteur* EF *des faces verticales sur leur bord égale* $1^{m},6$ : *les plans inclinés se prolongent en avant d'une longueur* EM *égale à* $0^{m},8$. *La crête* GH *du toit de la fenêtre passe en direction par l'axe du cône et sa déclinaison est de* 45 *degrés, dans le sens qu'indique la figure. La porte et les fenêtres de la muraille sont arbitraires.*

*La distance centrale* = 1 *mètre.*

Nous avons particulièrement à considérer dans l'édifice proposé les contours apparents des surfaces courbes et les intersections de l'une d'elles par des plans. L'opération dépendra donc des méthodes précédemment exposées et d'un problème élémentaire de géométrie descriptive.

Ainsi nous déterminons d'abord, par la méthode relative à un cylindre vertical, les points $\alpha$, $\beta$, de la base de la muraille où doivent passer ses arêtes de contour $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, dont les longueurs sont connues. Les arêtes de contour du cône ne passent pas exactement par $\alpha'$ et $\beta'$, mais elles sont très-voisines de ces points, et nous les supposerons en conséquence suffisamment déterminées sur le tableau par la

Digitized by Google

condition de se croiser au sommet du cône et d'être tangentes à sa base.

Les points E, L, M, N, G, qui appartiennent à une surface polyédrique, s'obtiennent sans difficulté : nous mesurons les ordonnées X et Z de leurs projections géométrales ; l'ordonnée Y du point G, la seule qui ne soit pas connue à priori, exigerait seulement la construction d'un triangle rectangle, si elle ne résultait aussi de ce qui va suivre.

L'arc elliptique KH, intersection du cône par l'un des plans inclinés, sera construit selon le procédé spécial pour ce cas (245), c'est-à-dire que nous concevrons une suite de plans horizontaux et déterminerons dans chacun d'eux la rencontre de la droite et du cercle d'intersection. A cet effet, prenant pour géométral le plan de la base du cône, nous tracerons la ligne de terre d'un plan vertical de projections passant par le point G et perpendiculaire à GH ; nous construirons dans ce plan vertical la projection du cône et le point G lui-même ; par ce dernier point nous mènerons une droite inclinée de 45 degrés sur la ligne de terre : elle représentera la trace verticale du plan incliné, et nous pratiquerons ensuite facilement l'opération de géométrie descriptive. Afin de particulariser les plans sécants horizontaux, nous choisissons ceux qui divisent la droite GM en trois parties égales, le premier passant par GH et le dernier par MK. De là résulteront les points H, P, Q, K.

L'arc AH donnerait lieu à une construction analogue ; mais il a très-peu de courbure dans les limites de son étendue, et nous pouvons, sans erreur sensible, le représenter par une ligne droite. On trouverait effectivement qu'il ne s'écarte pas d'un millimètre de la ligne droite sur le tableau. Cet arc n'est pas elliptique comme le précédent, mais hyperbolique, parce que son plan est parallèle à deux

Digitized by Google

arêtes du cône. La courbe entière s'étendrait à l'infini.

La détermination des points $\alpha$ et $\beta$ est la seule partie de l'opération qui ne permette pas de rapprocher le plan central de l'édifice. Il sera convenable de l'effectuer à part.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| $\alpha$ | X = | − 1,98 | $\beta$ | X = | 3,94 |
| | Y = | − 4,00 | | Y = | − 4,00 |
| | Z = | 19,70 | | Z = | 19,40 |
| E | X = | − 0,56 | L | X = | − 1,60 |
| | Y = | 3,00 | | Y = | 3,00 |
| | Z = | 17,40 | | Z = | 18,50 |
| N | X = | − 2,16 | G | X = | − 1,62 |
| | Y = | 4,60 | | Y = | 5,15 |
| | Z = | 17,93 | | Z = | 17,38 |
| H | X = | 0,03 | P | X = | 0,11 |
| | Y = | 5,15 | | Y = | 4,97 |
| | Z = | 19,02 | | Z = | 18,75 |
| Q | X = | 0,24 | K | X = | 0,40 |
| | Y = | 4,79 | | Y = | 4,60 |
| | Z = | 18,52 | | Z = | 18,30. |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | mm | | | | | |
| $\alpha$ | $x =$ | − 101 | $\beta$ | $x =$ | 203 | $\alpha\alpha' =$ | 355 |
| | $y =$ | − 206 | | $y =$ | − 208 | $\beta\beta' =$ | 361 |
| $e$ | $x =$ | − 29 | $l$ | $x =$ | − 86 | $ef =$ | 92 |
| | $y =$ | 172 | | $y =$ | 162 | $lj =$ | 86 |
| $m$ | $x =$ | − 63 | $n$ | $x =$ | − 121 | $g$ | $x =$ − 93 |
| | $y =$ | 273 | | $y =$ | 257 | | $y =$ 296 |
| $h$ | $x =$ | 2 | $p$ | $x =$ | 6 | $q$ | $x =$ 13 |
| | $y =$ | 271 | | $y =$ | 265 | | $y =$ 258 |

$k$ { $x = 22$, $y = 251$ } $s$ { $x = 50$, $y = 350$ } $b$ { $x = 59$, $y = -235$ } $bb' = 411$.

Les points $m$, $f$, $k$ se trouveront en ligne droite; les directions $mk$, $gh$, $mj$ concourront au point de distance.

Digitized by Google

UN TREUIL. (*Fig.* 106.)

168. *Le treuil proposé se compose de trois cylindres de même axe, un arbre, un tambour et deux tourillons, dont un seul est visible. Le diamètre des tourillons égale* $0^m,2$ *et leur longueur* $0^m,8$; *le diamètre de l'arbre* $0^m,8$ *et la longueur de sa portion visible* $2^m,5$; *le diamètre du tambour* $3^m,6$ *et son épaisseur* $0^m,6$. *L'axe est horizontal et sa déclinaison* $= 5 : 3$, *de sens tel qu'il s'éloigne vers la droite. On donne pour le centre de la base visible de l'arbre :*

$$\mathrm{I}\begin{cases} X = -\ 3^m, \\ Y = -\ 2, \\ Z = \ \ 15. \end{cases}$$

*La distance centrale* $= 3$ *mètres.*

La construction géométrale du problème se rapporte entièrement au cas d'un cylindre horizontal (145). En l'exécutant, nous trouverons avantageux de prendre le plan de la base visible de l'arbre pour plan vertical de projections; nous concevrons la surface cylindrique du tambour prolongée jusqu'à la rencontre de ce plan vertical, qui contiendra dans cette hypothèse les bases des trois cylindres, et par une même opération nous construirons les points de ces bases où doivent passer les arêtes des contours apparents. Nous en conclurons les extrémités opposées de ces droites, dont les longueurs sont connues, par le procédé du numéro cité. Pour le tambour, les droites dont la position est ainsi obtenue devront être limitées entre les points où elles rencontrent les plans de ses deux bases.

Les arêtes de contour sur l'arbre seront désignées par $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$; sur le tourillon par $\gamma\gamma'$ et $\delta\delta'$; sur le tambour par $\varepsilon\varepsilon'$ et $\varphi\varphi'$. Sur les circonférences des bases, nous prendrons seulement, avec les points déjà déterminés, les

Digitized by Google

extrémités de leurs diamètres horizontaux AB, CD, EF, A′B′, etc., et en outre sur les cercles du tambour les points à 45 degrés, G et H.

On pourrait y joindre, par un calcul facile, les extrémités des diamètres verticaux ; mais ces points seraient peu distants de ceux qui sont déjà déterminés.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| α | X = | − 3,078 m | β | X = | − 2,947 |
| | Y = | − 1,605 | | Y = | − 2,389 |
| | Z = | 15,047 | | Z = | 14,968 |
| γ | X = | − 3,427 | δ | X = | − 3,394 |
| | Y = | − 1,902 | | Y = | − 2,098 |
| | Z = | 14,323 | | Z = | 14,304 |
| ε | X = | − 1,744 | φ | X = | − 1,164 |
| | Y = | − 0,200 | | Y = | − 3,682 |
| | Z = | 17,162 | | Z = | 16,814 |
| A | X = | − 2,657 | C | X = | − 3,326 |
| | Y = | − 2,000 | | Y = | − 2,000 |
| | Z = | 14,794 | | Z = | 14,263 |
| D | X = | − 3,497 | E | X = | − 0,170 |
| | Y = | − 2,000 | | Y = | − 2,000 |
| | Z = | 14,365 | | Z = | 16,218 |
| F | X = | − 3,257 | G | X = | − 0,622 |
| | Y = | − 2,000 | | Y = | − 0,727 |
| | Z = | 18,070 | | Z = | 16,498 |
| α′ | X = | − 1,792 | γ′ | X = | − 3,015 |
| | Z = | 17,191 | | Z = | 15,009 |
| ε′ | X = | − 1,435 | | | |
| | Z = | 17,676. | | | |

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha \begin{cases} x = -614^{mm} \\ y = -320 \end{cases}$ | $\beta \begin{cases} x = -590 \\ y = -479 \end{cases}$ | $\gamma \begin{cases} x = -718 \\ y = -399 \end{cases}$ |
| $\delta \begin{cases} x = -712 \\ y = -440 \end{cases}$ | $\varepsilon \begin{cases} x = -305 \\ y = -35 \end{cases}$ | $\varphi \begin{cases} x = -207 \\ y = -657 \end{cases}$ |
| $a \begin{cases} x = -539 \\ y = -406 \end{cases}$ | $b \begin{cases} x = -660 \\ y = -395 \end{cases}$ | $c \begin{cases} x = -700 \\ y = -421 \end{cases}$ |
| $d \begin{cases} x = -730 \\ y = -417 \end{cases}$ | $e \begin{cases} x = -31 \\ y = -370 \end{cases}$ | $f \begin{cases} x = -541 \\ y = -332 \end{cases}$ |
| $g \begin{cases} x = -113 \\ y = -132 \end{cases}$ | $h \begin{cases} x = -473 \\ y = -123 \end{cases}$ | $\alpha' \begin{cases} x = -313 \\ y = -280 \end{cases}$ |
| $\beta' \begin{cases} x = -291 \\ y = -419 \end{cases}$ | $a' \begin{cases} x = -243 \\ y = -354 \end{cases}$ | $\gamma' \begin{cases} x = -603 \\ y = -380 \end{cases}$ |
| $\delta' \begin{cases} x = -597 \\ y = -420 \end{cases}$ | $c' \begin{cases} x = -585 \\ y = -401 \end{cases}$ | $\varepsilon' \begin{cases} x = -243 \\ y = -280 \end{cases}$ |
| $\varphi' \begin{cases} x = -148 \\ y = -637 \end{cases}$ | $e' \begin{cases} x = 23 \\ y = -359 \end{cases}$ | $f' \begin{cases} x = -475 \\ y = -323 \end{cases}$ |
| $g' \begin{cases} x = -55 \\ y = -128. \end{cases}$ | | |

La construction de la perspective est immédiate. Les droites parallèles à l'axe des cylindres dans l'espace, se trouveront concourir vers le point accidentel de cette direction, situé à la distance $1^m,8$ du centre perspectif (110).

UN TÉLESCOPE. (*Fig.* 107.)

169. *Un télescope se compose extérieurement de deux tubes dans ces conditions : le gros tube, ou le tube objectif, a* 3 *mètres de longueur sur* $0^m,6$ *de diamètre. Le tube oculaire a* 1 *mètre de longueur sur* $0^m,2$ *de diamètre. L'axe commun des tubes a son inclinaison et sa déclinai-*

Digitized by Google

*son égales à 45 degrés, de sens tels qu'il est ascendant et s'éloigne du plan central, de droite à gauche. On donne pour le centre* I *de la base visible du gros tube :*

$$I \begin{cases} X = \overset{m}{1}, \\ Y = -2, \\ Z = 6. \end{cases}$$

*Le télescope s'appuie par des tourillons sur deux tiges verticales : la ligne des tourillons rencontre l'axe des tubes à la distance* 1 *mètre du point* I, *et sa longueur totale est de* $1^m,8$. *Les tiges verticales ont* $2^m,4$ *de hauteur. On néglige les épaisseurs de ces dernières parties de l'appareil.*

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

L'objet proposé nous offre deux surfaces cylindriques réunies comme celles que nous avons considérées dans le treuil, mais qui se rapportent, par leur direction dans l'espace, au cas général du n° 146. Nous faisons passer le plan géométral par le point I, parce que la trace du plan de la base commune aux deux cylindres s'y construit immédiatement; cette trace est une droite passant en I et déclinant de 45 degrés, mais en sens inverse du télescope. Exécutant ensuite la construction indiquée dans l'article précité, nous déterminons successivement les points $\alpha$ et $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ où passent les arêtes de contour apparent sur les bases concentriques, et les extrémités opposées $\alpha'$ et $\beta'$, $\gamma'$ et $\delta'$ de ces arêtes.

Nous prenons sur l'axe du gros tube, à la distance 1 mètre du point I, le point par lequel doit passer la ligne des tourillons, et nous construisons cette ligne, en donnant à sa projection horizontale la longueur de $1^m,8$.

Pour les circonférences des bases, nous ajoutons aux points obtenus les extrémités des diamètres horizontaux AB et MN, et celles des diamètres perpendiculaires aux précé-



Digitized by Google

dents, c'est-à-dire les points de ces circonférences les plus élevés et les plus bas dans l'espace : ils sont désignés par E et F, G et H. Nous savons que ces points doivent être pris sur le rabattement des cercles et relevés comme $\alpha$ et $\beta$.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| $\alpha$ | X = | 0,742 | $\beta$ | X = | 1,254 |
| | Y = | — 2,143 | | Y = | — 1,845 |
| | Z = | 5,944 | | Z = | 6,034 |
| $\alpha'$ | X = | — 0,758 | $\gamma$ | X = | 0,914 |
| | Y = | — 0,021 | | Y = | — 2,048 |
| | Z = | 7,444 | | Z = | 5,984 |
| $\delta$ | X = | 1,085 | $\gamma'$ | X = | 1,414 |
| | Y = | — 1,949 | | Y = | — 2,756 |
| | Z = | 6,014 | | Z = | 5,484 |
| A | X = | 0,788 | E | X = | — 1,150 |
| | Y = | — 2,000 | | Y = | — 1,788 |
| | Z = | 5,788 | | Z = | 5,850 |
| M | X = | 0,929 | G | X = | 1,050 |
| | Y = | — 2,000 | | Y = | — 1,929 |
| | Z = | 5,929 | | Z = | 5,950 |
| P | X = | — 0,136 | Q | X = | 1,136 |
| | Y = | — 1,293 | | Y = | 1,293 |
| | Z = | 5,864 | | Z = | 7,136. |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | mm | | | | | | |
| $\alpha$ | $x$ = | 250 | $\beta$ | $x$ = | 415 | $\alpha'$ | $x$ = | — 204 |
| | $y$ = | — 721 | | $y$ = | — 611 | | $y$ = | — 6 |
| $\beta'$ | $x$ = | — 65 | $\gamma$ | $x$ = | 306 | $\delta$ | $x$ = | 361 |
| | $y$ = | 73 | | $y$ = | — 695 | | $y$ = | — 648 |
| $\gamma'$ | $x$ = | 516 | $\delta'$ | $x$ = | 575 | $a$ | $x$ = | 272 |
| | $y$ = | — 1005 | | $y$ = | — 963 | | $y$ = | — 691 |

Digitized by Google

$$b \begin{cases} x = 390 \\ y = -644 \end{cases} \quad c \begin{cases} x = 393 \\ y = -611 \end{cases} \quad f \begin{cases} x = 276 \\ y = -719 \end{cases}$$

$$a' \begin{cases} x = -195 \\ y = 33 \end{cases} \quad e' \begin{cases} x = -95 \\ y = 90 \end{cases} \quad m \begin{cases} x = 313 \\ y = -674 \end{cases}$$

$$g \begin{cases} x = 353 \\ y = -648 \end{cases} \quad m' \begin{cases} x = 526 \\ y = -997 \end{cases} \quad g' \begin{cases} x = 564 \\ y = -954 \end{cases}$$

$$n' \begin{cases} x = 569 \\ y = -967 \end{cases} \quad h' \begin{cases} x = 523 \\ y = -1001 \end{cases} \quad p \begin{cases} x = -46 \\ y = -441 \end{cases}$$

$$q \begin{cases} x = 318 \\ y = -362 \end{cases} \quad pp' = 813 \quad qq' = 672.$$

La construction de la perspective est immédiate et ne donne lieu à aucune remarque nouvelle.

UNE CHARRETTE COUVERTE. (*Fig.* 108.)

170. *L'entablement ou le fond d'une charrette est un rectangle, long de* 2 *mètres et large de* $1^m,2$. *Le côté* AA′ *qui en représente la longueur a une déclinaison* $= 4 : 3$, *de sens tels qu'il s'éloigne vers la droite. On donne la position du point* A :

$$A \begin{cases} X = 1^m, \\ Y = -3, \\ Z = 10. \end{cases}$$

*La couverture se compose de deux pans verticaux, hauts de* $1^m,4$, *se raccordant avec un cylindre demi-circulaire. Les brancards sont parallèles; leur mutuelle distance égale* $0^m,9$ *et leur longueur* 2 *mètres : ils sont réduits pour la construction à des lignes sans épaisseur.*

*L'axe des roues est dans le plan de l'entablement, qu'il divise en parties égales : sa longueur, en y comprenant celle des moyeux, est de* $1^m,94$. *Chaque moyeu est un cylindre épais diamétralement de* $0^m,3$, *et long de* $0^m,36$. *Le diamètre total des roues égale* 2 *mètres. L'épais-*



Digitized by Google

*seur des jantes, perpendiculairement à l'axe des roues, est* $0^m,12$, *et leur largeur parallèlement à cette droite,* $0^m,1$. *Les surfaces latérales des jantes sont planes et d'à-plomb avec les moyeux. Il y a douze rayons ou croisillons, de forme rectangulaire, s'inclinant coniquement, de telle sorte que leurs arêtes les plus extérieures rencontrent chaque moyeu à la distance* $0^m,166$ *du cercle qui forme la base visible de ce cylindre. Leur épaisseur égale* $0^m,06$, *et leur largeur est déterminée par celle des jantes. On suppose que les surfaces extérieures des croisillons se raccordent avec celles des jantes, et qu'elles coupent le moyeu suivant des arcs de cercles. Il y a dans chaque roue deux croisillons horizontaux.*

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Les éléments du problème sont nombreux, et la construction géométrale pourrait se compliquer beaucoup, si nous n'imaginions quelques artifices pour en éluder les difficultés. Nous la simplifierons aussi, en faisant une part convenable aux opérations susceptibles de s'exécuter sur le tableau.

Nous remarquons d'abord, dans le corps de la voiture et ses accessoires, plusieurs surfaces cylindriques, savoir : la partie supérieure de la couverture, les surfaces convexes des jantes, et celle du moyeu visible. Nous déterminons, par l'opération connue, leurs arêtes de contour apparent $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$.

A cet effet, nous pouvons prendre pour géométral le plan de l'entablement, et nous employons successivement deux plans verticaux de projections, dont un pour la première surface, qui n'a pas sa génératrice parallèle à celles des autres. Les lignes $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$ appartiennent à la roue la plus éloignée; elles sont les prolongements de $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, et se déterminent en même temps que celles-ci. A la vérité, $\delta\delta'$ est invisible; mais sa position peut être utile

Digitized by Google

pour mieux déterminer la partie visible de la roue. Nous désignons par $\mu$ et $\nu$, $\mu'$ et $\nu'$, des points situés sur les arêtes de contour du moyeu visible, aux distances $0^m,166$ et $0^m,266$ du cercle extérieur de ce cylindre: ils appartiennent aux deux cercles de la même surface où doivent aboutir les arêtes vives des rayons. Nous négligeons le prolongement du moyeu au delà de ces points, comme devant être invisible.

Pour fixer la position des bases du cylindre supérieur de la voiture, nous ajoutons seulement aux précédents $\alpha$ et $\alpha'$, les points D, D′, D″, situés sur leurs circonférences, à la hauteur de $1^m,8$ au-dessus de l'entablement. Nous prenons aussi, sur la face du moyeu visible, les points C et C′, extrémités de son diamètre horizontal.

Occupons-nous maintenant avec plus de détails de la roue qui est en évidence. Ses jantes nous offrent quatre cercles, deux en dehors concentriques $6G\gamma G'$, $6'G''\gamma'G'''$, et deux en dedans MPV, M″P″V″: ceux-ci, comme nous le verrons bientôt, seront assujettis à passer par un grand nombre de points considérés spécialement; et nous prenons sur les premiers, avec $6, \gamma, \ldots$ déjà obtenus, les extrémités G et G′, G″ et G‴ de leurs diamètres horizontaux, en nous servant d'ailleurs de la construction effectuée pour les arêtes de contour.

A l'égard des croisillons, l'opération n'est pas aussi simple. Nous ferons dépendre leur détermination de leurs points de rattache aux jantes, des deux cercles où doivent passer leurs arêtes vives à la surface du moyeu, et des deux points où les plans de leurs faces inclinées sur l'axe de rotation rencontrent cette droite. Nous construisons donc d'abord les points P et Q, R et S, . . ., $P^2$ et Q″, . . ., qui sont, sur les jantes, les points de départ de leurs arêtes, tant extérieures qu'intérieures: cette partie de l'opération se réduit à diviser la projection verticale com-

Digitized by Google

mune aux deux cercles des jantes, comme les cercles eux-mêmes sont divisés dans l'espace; mais il suffit de construire ainsi les points plus élevés que le centre, les autres devant s'en conclure sur le tableau. Pour les cercles à la surface du moyeu, nous ajoutons aux points $\mu$ et $\nu$, $\mu'$ et $\nu'$, précédemment obtenus, les extrémités L et L′ de leurs diamètres horizontaux.

Les points I et I′, où les plans des faces inclinées rencontrent l'axe des roues, exigent une opération particulière. Pour obtenir le premier, nous concevons un plan vertical par l'axe de rotation, coupant le plan de la face inclinée qui passe en MN, suivant une certaine droite, dont nous construisons la rencontre avec l'axe. Or, cette droite rencontre la surface du moyeu un peu en avant du cercle où aboutissent les arêtes vives des rayons, et de manière que son prolongement intérieur passe par le milieu de la corde de l'arc compris entre les deux arêtes de la face considérée. En conséquence, soient (*fig. a*) sur l'épure, OO′ l'axe de rotation, O le centre de la face du moyeu visible. Nous prenons $O\varphi = 0^m,166$; nous élevons les perpendiculaires $O\zeta = 0^m,88$ = distance du centre aux jantes, et $\varphi\psi = 0^m,15$ = rayon de moyeu: nous décrivons du point $\varphi$ l'arc symétrique $\theta\psi\zeta$, tel que sa corde $\lambda\omega\zeta = 0^m,06$ = épaisseur des rayons; enfin, nous tirons la droite $\xi\omega$, dont la rencontre avec OO′ est le point I. Car cette droite $\xi\omega$ représente le rabattement de celle que nous avons conçue pour la détermination de ce point. Nous obtenons ensuite le point I′, en prenant $II' = 0^m,1$ = largeur des rayons. On verra l'usage que nous ferons de ces points sur le tableau.

Mais nous avons poussé loin l'exactitude en tenant compte de la courbure de l'arc $\theta\zeta$: son influence sur les valeurs des coordonnées aériennes des points cherchés est à peine d'un millimètre; elle est tout à fait nulle sur celles

Digitized by Google

des coordonnées perspectives, de sorte que nous aurions pu nous dispenser de décrire cet arc, et faire passer la droite par le point $\psi$.

Quant à la seconde roue, nous ferons dépendre sa portion visible des cercles $\delta G_1 \varepsilon$, $\delta' G'_1 \varepsilon'$, $M''_1 P'_1 V''_1$, de quelques points analogues par leurs positions à ceux de la première, et des points J, J', où les plans des faces des rayons inclinées sur l'axe de rotation rencontrent cet axe. Les points J, J' sont les symétriques de I, I', et nous les obtenons en prenant O'J, O'J' de mêmes longueurs que OI, O'I'.

Les brancards EE', FF', dont les épaisseurs sont laissées arbitraires, doivent être réduits sur l'épure à des lignes droites, et leur construction ne donne lieu à aucune difficulté.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A' | X = | 2,800 m | A'' | X = | 0,040 |
| | Z = | 12,400 | | Z = | 10,072 |
| E | X = | — 0,320 | F | X = | — 1,040 |
| | Z = | 8,490 | | Z = | 9,030 |
| E' | X = | 0,880 | $\alpha$ | X = | 0,435 |
| | Z = | 10,090 | | Y = | — 1,010 |
| | | | | Z = | 10,424 |
| $\alpha$ | X = | 2,235 | D | X = | 0,878 |
| | Y = | — 1,010 | | Y = | — 1,200 |
| | Z = | 12,824 | | Z = | 10,092 |
| D' | X = | 2,678 | $\beta$ | X = | 2,311 |
| | Y = | — 1,200 | | Y = | — 2,019 |
| | Z = | 12,492 | | Z = | 11,132 |
| $\gamma$ | X = | 1,972 | $\beta'$ | X = | 2,231 |
| | Y = | — 3,927 | | Y = | — 2,019 |
| | Z = | 10,679 | | Z = | 11,192 |

Digitized by Google

$$\varepsilon \begin{cases} X = 0{,}420 \\ Y = -3{,}927 \\ Z = 11{,}843 \end{cases} \qquad G \begin{cases} X = 1{,}596 \\ Y = -3{,}000 \\ Z = 10{,}178 \end{cases}$$

$$G' \begin{cases} X = 2{,}796 \\ Y = -3{,}000 \\ Z = 11{,}778 \end{cases} \qquad M \begin{cases} X = 2{,}178 \\ Y = -2{,}121 \\ Z = 10{,}954 \end{cases}$$

$$N \begin{cases} X = 2{,}214 \\ Y = -2{,}121 \\ Z = 11{,}002 \end{cases} \qquad P \begin{cases} X = 1{,}948 \\ Y = -2{,}224 \\ Z = 10{,}647 \end{cases}$$

$$Q \begin{cases} X = 1{,}916 \\ Y = -2{,}254 \\ Z = 10{,}605 \end{cases} \qquad R \begin{cases} X = 1{,}748 \\ Y = -2{,}534 \\ Z = 10{,}381 \end{cases}$$

$$S \begin{cases} X = 1{,}730 \\ Y = -2{,}586 \\ Z = 10{,}356 \end{cases} \qquad T \begin{cases} X = 1{,}669 \\ Y = -2{,}970 \\ Z = 10{,}275 \end{cases}$$

$$\lambda \begin{cases} X = 2{,}227 \\ Y = -2{,}859 \\ Z = 11{,}019 \end{cases} \qquad \lambda' \begin{cases} X = 2{,}165 \\ Y = -3{,}139 \\ Z = 10{,}933 \end{cases}$$

$$\mu \begin{cases} X = 2{,}094 \\ Y = -2{,}859 \\ Z = 14{,}118 \end{cases} \qquad C \begin{cases} X = 2{,}106 \\ Y = -3{,}000 \\ Z = 10{,}858 \end{cases}$$

$$I \begin{cases} X = 2{,}037 \\ Y = -3{,}000 \\ Z = 11{,}097 \end{cases} \qquad J \begin{cases} X = 0{,}803 \\ Y = -3{,}000 \\ Z = 12{,}023. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

$$a \begin{cases} x = 200^{mm} \\ y = -600 \end{cases} \qquad a' \begin{cases} x = 452 \\ y = -473 \end{cases} \qquad a'' \begin{cases} x = 7 \\ y = -560 \end{cases}$$

$$ab = 280 \qquad a''b'' = 261 \qquad \alpha \begin{cases} x = 83 \\ y = -194 \end{cases}$$
$$a'b' = 226$$

$$\alpha' \begin{cases} x = 349 \\ y = -158 \end{cases} \qquad d \begin{cases} x = 174 \\ y = -238 \end{cases} \qquad d' \begin{cases} x = 429 \\ y = -192 \end{cases}$$

Digitized by Google

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $d''$ | $x = 30$, $y = -226$ | $e$ | $x = -75$, $y = -707$ | $f$ | $x = -230$, $y = -665$ |
| $e'$ | $x = 174$, $y = -595$ | $f'$ | $x = 30$, $y = -565$ | $\beta$ | $x = 415$, $y = -363$ |
| $\gamma$ | $x = 369$, $y = -735$ | $\beta'$ | $x = 399$, $y = -361$ | $\gamma'$ | $x = 352$, $y = -731$ |
| $g$ | $x = 314$, $y = -589$ | $g'$ | $x = 475$, $y = 509$ | $g''$ | $x = 296$, $y = -586$ |
| $g'''$ | $x = 456$, $y = -507$ | $m$ | $x = 398$, $y = -387$ | $n$ | $x = 402$, $y = -386$ |
| $p$ | $x = 366$, $y = -418$ | $q$ | $x = 361$, $y = -425$ | $r$ | $x = 337$, $y = -488$ |
| $s$ | $x = 334$, $y = -499$ | $t$ | $x = 325$, $y = -578$ | $p'$ | $x = 432$, $y = -392$ |
| $q'$ | $x = 436$, $y = -397$ | $r'$ | $x = 457$, $y = -438$ | $s'$ | $x = 459$, $y = -445$ |
| $t'$ | $x = 466$, $y = -509$ | $m''$ | $x = 381$, $y = -385$ | $q''$ | $x = 344$, $y = -423$ |
| $s''$ | $x = 317$, $y = -497$ | $p'''$ | $x = 416$, $y = -391$ | $r'''$ | $x = 441$, $y = -437$ |
| $t'''$ | $x = 450$, $y = -504$ | $\lambda$ | $x = 404$, $y = -519$ | $\lambda'$ | $x = 396$, $y = -574$ |
| $\mu$ | $x = 376$, $y = -514$ | $\mu'$ | $x = 368$, $y = -569$ | $\nu$ | $x = 360$, $y = -512$ |
| $\nu'$ | $x = 352$, $y = -566$ | $c$ | $x = 388$, $y = -553$ | $c'$ | $x = 412$, $y = -541$ |
| $l$ | $x = 360$, $y = -547$ | $l'$ | $x = 344$, $y = -545$ | $i$ | $x = 367$, $y = -541$ |
| $i'$ | $x = 351$, $y = -538$ | $j$ | $x = 134$, $y = -499$ | $j'$ | $x = 149$, $y = -502$ |

Digitized by Google

$$\varepsilon \begin{cases} x = 71 \\ y = -663 \end{cases} \quad \varepsilon' \begin{cases} x = 85 \\ y = -666 \end{cases} \quad g_1 \begin{cases} x = 8 \\ y = -527 \end{cases}$$

$$g''_1 \begin{cases} x = 22 \\ y = -529 \end{cases} \quad g'''_1 \begin{cases} x = 206 \\ y = -466 \end{cases} \quad m''_1 \begin{cases} x = 123 \\ p = -641 \end{cases}$$

$$n''_1 \begin{cases} x = 117 \\ y = -643 \end{cases} \quad n_1 \begin{cases} x = 103 \\ y = -640 \end{cases} \quad p'''_1 \begin{cases} x = 80 \\ y = -643 \end{cases}$$

$$q'''_1 \begin{cases} x = 76 \\ y = -640 \end{cases} \quad r'''_1 \begin{cases} x = 48 \\ y = -604 \end{cases} \quad s'''_1 \begin{cases} x = 43 \\ y = -596. \end{cases}$$

Ces valeurs étant portées sur la toile, nous décrivons les diverses lignes, droites ou courbes, qu'elles déterminent immédiatement, et il nous reste seulement à construire les rayons des roues. Pour la première, celle qui est totalement visible, nous abaissons des points $m$, $n$, $p$,..., $p''$, $r''$,..., des verticales de longueurs telles qu'elles soient divisées en parties égales respectivement par les droites $gg'$ et $g''g'''$, perspectives de deux diamètres horizontaux : les extrémités de ces verticales représentent, sur la moitié inférieure de la roue, les points de la surface des jantes où aboutissent les arêtes vives des rayons.

Nous remarquerons ensuite que des droites que l'on concevrait, dans l'espace, passant par les milieux des arcs MN, PQ,..., M″N″, P″Q″,..., et dirigées respectivement vers les points I et I′, seraient également distantes des arêtes vives, sur chaque face inclinée des rayons dont elles diviseraient les épaisseurs. Il nous est facile, d'après cette condition, de tracer les perspectives des arêtes, avec une exactitude sensible; nous les dirigerons, à partir des points $m$, $n$, $p$,..., $p''$, $r''$,..., de telle sorte que les droites conçues par les milieux des épaisseurs concourent en $i$ et en $i'$; et nous leur donnerons le degré de convergence ou de divergence résultant de leur parallélisme et de leurs directions diverses dans l'espace, en ayant égard à la position approximative de leurs points accidentels. Les directions

Digitized by Google

perspectives des arêtes étant ainsi obtenues, nous les figurons à plein trait, depuis les surfaces des jantes jusqu'à leurs rencontres avec les ellipses $\mu l \mu'$, $\nu l' \nu'$, du moins si elles sont visibles jusqu'à leurs emboitements dans l'essieu.

Enfin, relativement à la portion visible de la seconde roue, ayant décrit totalement ou en partie les ellipses $g_1 \varepsilon$, $g''_1 \varepsilon'$, $m''_1 n''_1 p''_1$, $m_1 n_1 p_1$, nous observons que les rayons qui passent en $m_1$, $p_1, \ldots$, $m''_1$, $p''_1, \ldots$, sont respectivement analogues à ceux qui passent en $m$, $p, \ldots$, $m''$, $p'', \ldots$; ils leur sont mêmes parallèles dans l'espace. Nous les construisons donc de la même manière, à l'aide des points $j$ et $j'$.

UNE SPHÈRE. (*Fig.* 109 et 110.)

171. *Le rayon d'une sphère égale* 1 *mètre; on donne pour son centre*

$$\text{I} \begin{cases} X = 2^{m}, \\ Y = 4, \\ Z = 8. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Nous appliquerons successivement la méthode générale du n° 151, expliquée dans ses détails au n° 156, et celle des enveloppes perspectives.

*Première méthode* (*fig.* 109). Nous déterminons d'abord (150 et 154) les points latéraux $\alpha$, $\beta$, et les culminants $\gamma$, $\delta$. Ensuite, nous concevons suivant l'axe des Y trois plans, dont l'un passe par le centre de la surface; les deux autres s'écarteront symétriquement du premier, à gauche et à droite, et seront tels que leur plus courte distance au centre égale $0^{m},6$. Conformément à la méthode qu'il s'agit d'appliquer, nous construisons les contacts des couples de tangentes menées du point de vue aux trois sec-

Digitized by Google

tions : ils sont désignés ci-après par les lettres $\varepsilon$ et $\varepsilon'$, $\varphi$ et $\varphi'$, $\psi$ et $\psi'$.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | X = 1,008 m<br>Y = 4,000<br>Z = 8,123 | $\beta$ | X = 2,934<br>Y = 4,000<br>Z = 7,642 | $\gamma$ | X = 2,000<br>Y = 4,839<br>Z = 8,344 |
| $\delta$ | X = 2,000<br>Y = 3,061<br>Z = 8,344 | $\varepsilon$ | X = 1,871<br>Y = 4,847<br>Z = 7,483 | $\varepsilon'$ | X = 2,081<br>Y = 3,058<br>Z = 8,326 |
| $\varphi$ | X = 2,442<br>Y = 4,686<br>Z = 7,422 | $\varphi'$ | X = 2,659<br>Y = 3,253<br>Z = 8,084 | $\psi$ | X = 1,339<br>Y = 4,686<br>Z = 7,698 |
| $\psi'$ | X = 1,458<br>Y = 3,253<br>Z = 8,385. | | | | |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $x$ = 372 mm<br>$y$ = 1477 | $\beta$ | $x$ = 1152<br>$y$ = 1570 | $\gamma$ | $x$ = 805<br>$y$ = 1948 |
| $\delta$ | $x$ = 719<br>$y$ = 1100 | $\varepsilon$ | $x$ = 750<br>$y$ = 1943 | $\varepsilon'$ | $x$ = 750<br>$y$ = 1102 |
| $\varphi$ | $x$ = 987<br>$y$ = 1894 | $\varphi'$ | $x$ = 987<br>$y$ = 1207 | $\psi$ | $x$ = 521<br>$y$ = 1826 |
| $\psi'$ | $x$ = 521<br>$y$ = 1164. | | | | |

Le résultat perspectif ayant été construit, nous décrivons l'ellipse assujettie à passer par les dix points qu'il contient, et à prendre en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ des directions respectivement verticales et horizontales.

On voit que les points $\varphi$ et $\varphi'$ sont sur une même verticale, comme $\psi$ et $\psi'$, $\varepsilon$ et $\varepsilon'$. C'est une vérification de la

Digitized by Google

construction (156). On serait peut-être tenté de croire, d'après cette remarque et la position particulière du cercle de contour apparent, que les verticales sont divisées également par le diamètre $\alpha 6$; mais cela n'est vrai que d'une manière sensible (*).

*Seconde méthode.* Supposant toujours les points latéreux et culminants préalablement déterminés, nous coupons la sphère par quatre plans parallèles au tableau, et séparés par des arcs de 30 degrés. Un de ces plans passera par le centre, deux autres seront en deçà de ce point et le quatrième au delà. Ces plans sont choisis dans la présomption que les quatre sections rencontreront le cercle de contour apparent. Nous mettrons en perspective les quatre sections, et comme elles sont parallèles au tableau, il nous suffira de connaître leurs centres et les grandeurs de leurs rayons. Nous les obtenons par une construction fort simple et indiquée précédemment. Dans le résultat ci-après, les lettres I, I′, I″, I‴ désignent les centres, R, R′, R″, R‴ les rayons.

*Résultat géométral.*

$I' \left\{ Z = 7^{m},5 \right.$ $R' = 0,866$ $I'' \left\{ Z = 7,134 \right.$ $R'' = 0,5$

$I''' \left\{ Z = 8,5 \right.$ $R''' = 0,866.$

(*) Pour que ces droites fussent divisées en parties égales, il faudrait que le diamètre conjugué de $\alpha 6$, dans l'ellipse, fût vertical, et cela ne peut être. En effet, dans l'espace, $\alpha 6$ est une corde horizontale du cercle de contour, $\gamma\delta$ est une autre corde parallèle au plan normal, et leur point d'intersection correspond au centre de l'ellipse. Par ce point, concevons une des sections faites suivant l'axe des Y, et, par les deux points qu'elle détermine sur le cercle, des tangentes à la courbe. Ces tangentes se réuniront en un point du plan central, puisqu'elles doivent être parallèles en perspective; mais ce point de rencontre sera différent de celui où $\alpha 6$ rencontre le même plan; car $\alpha 6$ n'étant qu'une corde et non un diamètre du cercle, et la section étant perpendiculaire à cette corde, les deux tangentes ne peuvent la rencontrer en un même point. Donc ces tangentes, en perspective, ne peuvent être parallèles à $\alpha 6$.

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

$$i \begin{cases} x = 750^{mm} \\ y = 1500 \end{cases} \quad i' \begin{cases} x = 800 \\ y = 1600 \end{cases} \quad i'' \begin{cases} x = 841 \\ y = 1682 \end{cases}$$

$$i''' \begin{cases} x = 706 \\ y = 1412 \end{cases} \quad r = 375 \quad r'' = 210$$

$$r' = 346 \quad r''' = 306.$$

Ayant construit les quatre cercles sur le tableau, nous remarquons que celui qui est décrit du centre $i''$ est totalement enveloppé par le cercle du centre $i'$, et qu'il n'a en conséquence aucun point de commun avec la ligne de contour. Nous traçons cette ligne, comme l'enveloppe des autres cercles, d'ailleurs en la faisant passer par les points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$.

UN TORE. (*Fig.* 111 et 112.)

172. *L'axe d'un tore est vertical et dans le plan normal. Le cercle générateur a* $0^m,5$ *de rayon, et son centre est à* 2 *mètres du centre de la surface. Pour ce dernier point, on donne :*

$$I \begin{cases} X = -4^m, \\ Z = 10. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

D'après la position de la surface à l'égard du point de vue, nous reconnaissons sans difficulté qu'il y a dans les diverses branches de son contour apparent visible, deux points latéraux et quatre culminants. Nous les désignons par $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$, $\gamma$, $\gamma'$, et les déterminons préalablement (155).

Pour obtenir de nouveaux points de ces courbes, ou les éléments nécessaires à leur description sur le tableau, nous appliquerons successivement la méthode des cônes enve-

Digitized by Google

loppes et celle des enveloppes perspectives, dont nous pourrons ainsi comparer les avantages.

*Première méthode* (*fig.* 111). Nous couperons le tore par quatre plans horizontaux situés à $0^m,2$ et $0^m,4$ du centre, tant au-dessus qu'au-dessous. Chaque plan contiendra deux cercles concentriques, rencontrant respectivement le contour extérieur et le contour intérieur de la surface. Conformément à la méthode dont il s'agit, nous obtiendrons les points de rencontre, en considérant les cercles comme les bases d'autant de cônes tangents ayant leurs sommets sur l'axe de révolution, et pratiquant, en un mot, la construction indiquée dans ses détails au n° 157, avec les simplifications qui résultent de la position du centre dans le plan normal. Les points déterminés de la sorte seront désignés respectivement par les lettres E, F, M, N, P, Q, T, U, vers la gauche, et les mêmes lettres accentuées vers la droite. Mais il suffira, d'après la symétrie de la surface par rapport au plan normal, d'opérer pour les points situés à gauche.

En outre, pour mieux connaître le cours des branches intérieures, nous ajouterons aux précédentes les sections intérieures faites par des plans à $0^m,44$ du centre, tant au-dessus qu'au-dessous, et à $0^m,1$ au-dessus. Les nouveaux points seront L, R, S, vers la gauche. On comprend que nous sommes dirigés dans le choix de ces plans par la position des points culminants, qu'on peut déjà supposer connue, et par les autres circonstances du problème.

Les valeurs des ordonnées Y, dans le résultat géométral, rappelleront les sections auxquelles les points se rapportent, puisqu'elles suffiraient pour les indiquer.

Digitized by Google

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| α | X = | — 2,421 m | 6 | X = | 0,000 |
| | Y = | — 4,000 | | Y = | — 3,520 |
| | Z = | 9,375 | | Z = | 12,139 |
| 6′ | X = | 0,000 | γ | X = | 0,000 |
| | Y = | — 4,467 | | Y = | — 3,541 |
| | Z = | 11,823 | | Z = | 8,198 |
| γ′ | X = | 0,000 | E | X = | — 2,227 |
| | Y = | 4,434 | | Y = | — 3,600 |
| | Z = | 7,752 | | Z = | 10,575 |
| F | X = | — 1,292 | M | X = | — 2,450 |
| | Y = | — 3,600 | | Y = | — 3,800 |
| | Z = | 3,895 | | Z = | 9,805 |
| N | X = | — 1,461 | P | X = | — 2,220 |
| | Y = | — 3,800 | | Y = | — 4,200 |
| | Z = | 9,507 | | Z = | 8,943 |
| Q | X = | — 1,541 | T | X = | — 1,327 |
| | Y = | — 4,200 | | Y = | — 4,400 |
| | Z = | 10,045 | | Z = | 8,122 |
| U | X = | — 1,545 | L | X = | — 0,968 |
| | Y = | — 4,400 | | Y = | — 3,560 |
| | Z = | 10,708 | | Z = | 8,527 |
| R | X = | — 1,469 | S | X = | — 1,356 |
| | Y = | — 3,900 | | Y = | — 4,440 |
| | Z = | 9,652 | | Z = | 11,127. |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | $x$ = | — 516 mm | 6 | $x$ = | 000 | 6′ | $x$ = | 000 |
| | $y$ = | — 853 | | $y$ = | — 580 | | $y$ = | — 764 |
| γ | $x$ = | 000 | γ′ | $x$ = | 000 | e | $x$ = | — 421 |
| | $y$ = | — 864 | | $y$ = | — 1144 | | $y$ = | — 681 |

Digitized by Google

$f \begin{cases} x = -291 \\ y = -809 \end{cases}$ $m \begin{cases} x = -500 \\ y = -775 \end{cases}$ $n \begin{cases} x = -307 \\ y = -800 \end{cases}$

$p \begin{cases} x = -497 \\ y = -939 \end{cases}$ $q \begin{cases} x = -306 \\ y = -836 \end{cases}$ $t \begin{cases} x = -327 \\ y = -1044 \end{cases}$

$u \begin{cases} x = -288 \\ y = -822 \end{cases}$ $l \begin{cases} x = -227 \\ y = -835 \end{cases}$ $r \begin{cases} x = -304 \\ y = -808 \end{cases}$

$s \begin{cases} x = -244 \\ y = -798. \end{cases}$

Ayant construit sur le tableau ces points et leurs symétriques, nous décrivons immédiatement les diverses branches de courbes qu'ils déterminent; mais celles qui représentent des contours intérieurs donnent lieu à quelques remarques. Nous trouvons, en effet, que les points *r* et *t* sont rétrogrades par rapport aux points qui les précèdent sur la courbe *γlfn*, aussi bien qu'à l'égard de ceux de la courbe *6's* dans un ordre inverse. Nous concluons que ces deux points appartiennent à une branche invisible, et que la première courbe doit s'arrêter dans le voisinage du point *n*. Le point *u* est également invisible; mais, d'après sa position, il ne peut appartenir qu'à un prolongement de la branche visible *6's*. Les mêmes choses se remarquent vers la droite. Nous reconnaissons en définitive les quatre branches du quadrilatère sur lequel s'est portée notre attention au n° 51, et dont les sommets sont des points de désinence. Ainsi se trouvent vérifiées d'une manière frappante nos remarques théoriques sur ces particularités des lignes de contour.

*Seconde méthode* (*fig.* 112). Opérons maintenant par la méthode des enveloppes perspectives. Nous supposerons les mêmes plans sécants que ci-dessus, mais en supprimant les sections intérieures qui ont donné des points invisibles. Les points latéraux et culminants des ellipses détermineront, dans les conditions particulières du problème, les



Digitized by Google

axes principaux de ces courbes, que nous pourrons décrire en conséquence avec une grande précision. Les lettres grecques ε, φ, μ,... désigneront les points latéraux, vers la gauche; E, F, M,... les points culminants inférieurs sur le tableau, ou les plus rapprochés dans l'espace. L'analogie de ces notations avec celles qui correspondaient aux mêmes sections, dans l'emploi de la première méthode, nous dispense de reproduire les valeurs des ordonnées Y. Nous omettons également dans le résultat géométral les trois sections au-dessous du centre, parce qu'elles sont égales à trois des sections au-dessus.

*Résultat géométral.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| ε | X = — 2,238 m<br>Z = 9,471 | E | X = 0,000<br>Z = 7,762 |
| φ | X = — 1,675<br>Z = 9,711 | F | X = 0,000<br>Z = 8,300 |
| μ | X = — 3,375<br>Z = 8,316 | M | X = 0,000<br>Z = 7,542 |
| ν | X = — 1,523<br>Z = 9,700 | N | X = 0,000<br>Z = 8,458 |
| λ | X = — 1,735<br>Z = 9,689 | L | X = 0,000<br>Z = 8,237. |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ε | $x = -472$ mm<br>$y = -760$ | e | $x = 000$<br>$y = -935$ | φ | $x = -345$<br>$y = -741$ |
| f | $x = 000$<br>$y = -867$ | μ | $x = -510$<br>$y = -816$ | m | $x = 000$<br>$y = -1008$ |
| ν | $x = -312$<br>$y = -779$ | n | $x = 000$<br>$y = -899$ | λ | $x = -358$<br>$y = -735$ |

Digitized by Google

$$l \begin{cases} x = & 000 \\ y = - & 864 \end{cases} \quad \tau \begin{cases} x = - & 472 \\ y = - & 903 \end{cases} \quad t \begin{cases} x = & 0000 \\ y = - & 1143 \end{cases}$$

$$\pi \begin{cases} x = - & 510 \\ y = - & 902 \end{cases} \quad p \begin{cases} x = & 0000 \\ y = - & 1114 \end{cases} \quad \sigma \begin{cases} x = - & 358 \\ y = - & 916 \end{cases}$$

$$s \begin{cases} x = & 0000 \\ y = - & 1078. \end{cases}$$

Ayant construit, avec ces valeurs, les axes principaux des ellipses et ces courbes, nous traçons la ligne de contour extérieur de manière qu'elle soit enveloppante, et les branches de contour intérieur qui doivent être enveloppées. Ces lignes passeront d'ailleurs par les points préalables $\alpha$, $\alpha'$, 6, 6', $\gamma$, $\gamma'$, où leurs directions sont connues.

UNE BASE DE COLONNE. (*Fig.* 113.)

173. *Une base de colonne de l'ordre toscan a son module* (*) *égal à* $0^m,6$ : *la hauteur* $\alpha\alpha'$ *du tronc qui la surmonte, au-dessus du congé, est de* $1^m,8$. *Une face visible de la plinthe est parallèle au tableau. On donne pour le centre du cercle supérieur :*

$$\mathrm{I} \begin{cases} X = & 3^m, \\ Y = - & 2, \\ Z = & 10. \end{cases}$$

*La distance centrale* $= 2^m,5$.

L'objet proposé nous offre quatre surfaces courbes, savoir : le cylindre du fût de la colonne, la surface torique concave qui forme le congé, la surface cylindrique de la ceinture et le tore. Les deux cylindres seront déterminés sur le tableau par leurs points latéraux et culminants

(*) Voyez, pour le module et les proportions des colonnes, les *Ordres d'architecture*, à la fin du volume.



Digitized by Google

$\alpha$, $\beta$, A et $\gamma$, $\delta$, B; les points A et B sont d'ailleurs donnés par l'énoncé.

A l'égard du tore, nous commençons par assigner ses points latéraux $\varepsilon$, $\varphi$, et son point culminant inférieur $\omega$, à l'aide de la règle du n° 155, déjà pratiquée. Nous chercherons d'autres points de sa ligne de contour apparent, par la méthode des cônes enveloppes. A cet effet, remarquant que le rayon de son cercle générateur égale $0^m,12$, en vertu de la valeur du module, nous le coupons par deux plans horizontaux, à $0^m,8$ au-dessus et au-dessous du centre, d'où résulteront les points M et N, P et Q. Nous effectuons la construction expliquée au n° 157, en considérant le plan géométral comme celui qui passe par le centre du tore.

Il resterait à opérer pour la petite surface torique du congé; mais ses deux branches de contour sont extrêmement petites : elle se trouve même presque dans le cas où un rayon visuel pourrait décrire sans discontinuité son contour intérieur, c'est-à-dire dans le cas où les deux branches latérales disparaissent. Cependant, pour satisfaire plus rigoureusement à la théorie, nous en chercherons deux points $r$ et $s$, sur une section faite à $0^m,03$ au-dessous du centre de son cercle générateur, dont le rayon est seulement de $0^m,075$. L'application de la méthode à cette recherche exigera des soins minutieux.

Quant à la plinthe, la position de ses sommets se conclut de l'énoncé et des proportions de la colonne.

*Résultat géométral.*

$$\alpha \begin{cases} X = & 2,416^m \\ Y = - & 2,000 \\ Z = & 10,139 \end{cases} \qquad \beta \begin{cases} X = & 3,564 \\ Y = - & 2,000 \\ Z = & 9,795 \end{cases}$$

$$\gamma \begin{cases} X = & 2,342 \\ Y = - & 3,875 \\ Z = & 10,151 \end{cases} \qquad \delta \begin{cases} X = & 3,633 \\ Y = - & 3,875 \\ Z = & 9,765 \end{cases}$$

Digitized by Google

$$M\begin{cases} X = & 2,340 \\ Y = - & 3,975 \\ Z = & 10,414 \end{cases} \qquad N\begin{cases} X = & 3,779 \\ Y = - & 3,975 \\ Z = & 9,986 \end{cases}$$

$$\varepsilon\begin{cases} X = & 2,209 \\ Y = - & 4,055 \\ Z = & 10,172 \end{cases} \qquad \varphi\begin{cases} X = & 3,755 \\ Y = - & 4,055 \\ Z = & 9,708 \end{cases}$$

$$P\begin{cases} X = & 2,223 \\ Y = - & 4,135 \\ Z = & 9,945 \end{cases} \qquad Q\begin{cases} X = & 3,619 \\ Y = - & 4,135 \\ Z = & 9,526 \end{cases}$$

$$\omega\begin{cases} X = & 3,000 \\ Y = & 4,164 \\ Z = & 9,261 \end{cases} \qquad R\begin{cases} X = & 2,449 \\ Y = - & 3,830 \\ Z = & 10,254 \end{cases}$$

$$S\begin{cases} X = & 3,599 \\ Y = - & 3,830 \\ Z = & 9,909. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

$$\alpha\begin{cases} x = & 596^{mm} \\ y = - & 494 \end{cases} \qquad \beta\begin{cases} x = & 910 \\ y = - & 510 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha\alpha' = 444 \\ \beta\beta' = 459 \end{matrix}$$

$$a\begin{cases} x = & 798 \\ y = - & 798 \end{cases} \qquad \gamma\begin{cases} x = & 577 \\ y = - & 954 \end{cases} \qquad \delta\begin{cases} x = & 930 \\ y = - & 992 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \gamma\gamma' = 15 \\ \delta\delta' = 15 \end{matrix} \qquad b\begin{cases} x = & 804 \\ y = - & 1039 \end{cases} \qquad m\begin{cases} x = & 562 \\ y = - & 954 \end{cases}$$

$$n\begin{cases} x = & 946 \\ y = - & 995 \end{cases} \qquad \varepsilon\begin{cases} x = & 543 \\ y = - & 996 \end{cases} \qquad \varphi\begin{cases} x = & 967 \\ y = - & 1044 \end{cases}$$

$$p\begin{cases} x = & 559 \\ y = - & 1040 \end{cases} \qquad q\begin{cases} x = & 950 \\ y = - & 1085 \end{cases} \qquad \omega\begin{cases} x = & 810 \\ y = - & 1124 \end{cases}$$

$$r\begin{cases} x = & 597 \\ y = - & 934 \end{cases} \qquad s\begin{cases} x = & 908 \\ y = - & 966 \end{cases} \qquad c\begin{cases} x = & 596 \\ y = - & 1136 \end{cases}$$

$$d\begin{cases} x = & 506 \\ y = - & 966 \end{cases} \qquad \begin{matrix} ce = 441 \\ cc' = 81 \end{matrix} \qquad dd' = 69.$$

Digitized by Google

En construisant la perspective, nous ne rencontrons qu'une difficulté : c'est de faire passer la ligne de contour apparent du congé par les points $r$ et $s$ ; nous les trouvons, en effet, plus élevés que $\alpha'$ et $6'$ qui sont à la naissance de la courbe. Ces points appartiennent donc nécessairement à la branche invisible de contour intérieur qui est opposée au tableau. On prouverait, en effet, par des sections plus rapprochées du centre de la surface, que les branches latérales de son contour visible n'ont pas 3 millimètres de grandeur perspective.

On voit que la ligne de contour apparent des surfaces courbes, symétrique dans l'espace, ne l'est plus exactement sur le tableau : elle est nécessairement un peu déjetée, et s'abaisse vers la droite.

UNE TABLE RONDE. (*Fig.* 114.)

174. *Une table ronde a* $0^m,5$ *de rayon et* $0^m,04$ *d'épaisseur. On donne pour le centre du cercle supérieur :*

$$\mathrm{I}\begin{cases} X = -0^m,8 \\ Y = -0,8 \\ Z = \phantom{-}3,0 \end{cases}$$

*Dans le piédouche qui la supporte, on remarque un cylindre long de* $0^m,42$, *épais diamétralement de* $0^m,16$ : *il se raccorde avec une surface engendrée par la révolution d'un quart de cercle du rayon de* $0^m,2$, *et se termine inférieurement par un second cylindre haut de* $0^m,06$.

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Nous appliquons ici la méthode des enveloppes perspectives, et faisons dans la surface torique du piédouche trois sections à $0^m,05$, $0^m,10$ et $0^m,15$ au-dessous de son raccord avec le cylindre ; l'opération est donc très-simple. Nous nous bornons, pour tous les cercles, aux points latéraux et

Digitized by Google

culminants, que nous désignons, dans l'ordre des hauteurs verticales, par $\alpha$, $\alpha'$ et A, $\gamma$, $\gamma'$ et C, $\delta$, $\delta'$ et D, etc. Nous devons y joindre les extrémités inférieures $\beta$ et $\beta'$ des arêtes de contour apparent du premier cylindre, suffisantes pour déterminer les parties visibles de ces droites. Il serait facile, si on le jugeait convenable, de prendre un plus grand nombre de points sur les cercles de la table ou de la base du piédouche, qui doivent être décrits avec plus de précision que les courbes auxiliaires. Les ordonnées Y de tous les points résultent immédiatement des données de l'énoncé ou des élévations des plans sécants.

*Résultat géométral.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | X = — 1,256 m<br>Z = 2,795 | $\alpha'$ | X = — 0,302<br>Z = 3,049 |
| $\beta$ | X = — 0,877<br>Z = 2,977 | $\beta'$ | X = — 0,722<br>Z = 3,019 |
| $\gamma$ | X = — 0,883<br>Z = 2,976 | $\gamma'$ | X = — 0,717<br>Z = 3,020 |
| C | X = — 0,800<br>Z = 2,914 | $\delta$ | X = — 0,903<br>Z = 2,966 |
| $\delta'$ | X = — 0,696<br>Z = 3,027 | D | X = — 0,800<br>Z = 2,893 |
| $\varepsilon$ | X = — 0,941<br>Z = 2,955 | $\varepsilon'$ | X = — 0,655<br>Z = 3,031 |
| E | X = — 0,800<br>Z = 2,852 | $\varphi$ | X = — 1,063<br>Z = 2,904 |
| $\varphi'$ | X = — 0,524<br>Z = 3,048. | | |

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

$\alpha \begin{cases} x = -\ 899^{mm} \\ y = -\ 572 \end{cases}$ $\alpha' \begin{cases} x = -\ 198 \\ y = -\ 525 \end{cases}$ $a \begin{cases} x = -640 \\ y = -640 \end{cases}$

$\alpha\alpha'' = 29$ $\alpha'\alpha''' = 27$ $aa' = 32$ $6 \begin{cases} x = -588 \\ y = -845 \end{cases}$

$6' \begin{cases} x = -\ 479 \\ y = -\ 835 \end{cases}$ $\gamma \begin{cases} x = -\ 594 \\ y = -\ 884 \end{cases}$ $\gamma' \begin{cases} x = -\ 475 \\ y = -868 \end{cases}$

$c \begin{cases} x = -\ 549 \\ y = -\ 899 \end{cases}$ $\delta \begin{cases} x = -\ 608 \\ y = -\ 916 \end{cases}$ $\delta' \begin{cases} x = -460 \\ y = -900 \end{cases}$

$d \begin{cases} x = -\ 553 \\ y = -\ 940 \end{cases}$ $\varepsilon \begin{cases} x = -\ 637 \\ y = -\ 955 \end{cases}$ $\varepsilon' \begin{cases} x = -432 \\ y = -931 \end{cases}$

$e \begin{cases} x = -\ 561 \\ y = -\ 989 \end{cases}$ $\varphi \begin{cases} x = -\ 732 \\ y = -1006 \end{cases}$ $\varphi' \begin{cases} x = -344 \\ y = -958 \end{cases}$

$f \begin{cases} x = -\ 588 \\ y = -1074 \end{cases}$ $\varphi\varphi'' = 41$ $\varphi'\varphi''' = 40.$

Nous construisons les ellipses en observant, pour celles que nous voulons décrire complétement, que chaque point culminant inférieur, tel que *a*, détermine son supérieur *b*. Nous traçons les branches de contour de la surface torique tangentiellement aux trois sections de cette surface, en les raccordant avec les verticales élevées par 6 et 6'. Ces deux branches de contour se terminent dans le voisinage de leurs contacts avec la troisième ellipse. Pour s'en assurer, on ferait de nouvelles sections plus rapprochées, par exemple à $0^m,170$, $0^m,175$ et $0^m,180$ au-dessous du cylindre dans l'espace : on trouverait que leurs intersections consécutives sur le tableau deviendraient rétrogrades.

Digitized by Google

UN VASE. (*Fig.* 115.)

175. *La surface extérieure d'un vase est engendrée par la révolution d'une courbe* ABGMNK *autour d'une verticale* IK. *Cette courbe comprend : un demi-cercle* AB, *dont le diamètre est vertical et représente l'épaisseur du vase : ce diamètre égale* $0^m,06$, *et sa distance* BI *à l'axe de révolution* $0^m,6$; *un quart de cercle* BG, *ayant un rayon* CG *égal à* $0^m,4$; *un arc de cercle* GM *de* 36 *degrés, se raccordant avec le précédent, d'un rayon* EG *égal à* $1^m,2$; *enfin un arc de cercle* MNK, *décrit du centre* J, *où la direction* EM *rencontre l'axe.*

*La surface intérieure, dans sa partie visible, est décrite par un arc de cercle* AD *concentrique à* BG.

*Le support se compose de la surface qu'engendre un quart de cercle* PQ, *horizontal en* Q, *d'un rayon* HQ *égal à* $0^m,2$, *la distance du point* P *à l'axe de révolution étant de* $0^m,05$; *d'un cylindre dont la hauteur* QR *égale* $0^m,06$; *et d'un socle qui a* $0^m,56$ *de côté sur* $0^m,12$ *de hauteur. Une face du socle est parallèle au tableau.*

*Le point* I *est ainsi donné :*

$$I \begin{cases} X = & 2^m, \\ Y = - & 1,6 \\ Z = & 10. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Nous employons, comme précédemment, la méthode des enveloppes perspectives; mais nous cherchons d'abord à reconnaître les diverses lignes de contour apparent à la détermination desquelles elle doit s'appliquer.

Sur la lèvre et à la surface interne du vase, nous trouvons deux surfaces toriques : deux autres surfaces de même espèce et une portion de sphère composent son enveloppe

Digitized by Google

extérieure. Nous remarquons dans le support une surface torique et un cylindre. Ces surfaces se raccordent toutes, en se prolongeant mutuellement, ou du moins il n'y a de discontinuité qu'à la naissance du support. Les lignes à déterminer se composent de celles qui correspondent à ces diverses surfaces.

Ainsi, sur le bord de la lèvre, il y aura une branche de contour extérieur totalement fermée $\beta\alpha\beta'\alpha''$, ayant deux points latéraux $\beta$, $\beta'$, et deux culminants $\alpha$, $\alpha''$: elle appartient tout entière à la petite surface torique qu'engendre le demi-cercle AB. Une branche de contour intérieur, ayant le point culminant $\alpha'$, appartient à la surface engendrée par le quart de cercle AD. La première sera déterminée par les quatre points ci-dessus, et la condition d'envelopper une section faite à $0^m,05$ au-dessus du point I; les points latéraux et culminants de la section seront $\varepsilon$, $\varepsilon'$ et E. Pour la seconde nous ferons une section à la hauteur du point I, en désignant par $\gamma$, $\gamma'$, C les points analogues aux précédents.

Nous coupons le corps du vase par sept plans qui passent: par le milieu de l'arc AG; à $0^m,2$ au-dessous du point I; par le point G; par le milieu de l'arc GM; par le point M; par le point I, et à $0^m,3$ au-dessous de ce point. Les points latéraux des sections seront respectivement désignés par $\delta$ et $\delta'$, $\zeta$ et $\zeta'$, $\varphi$ et $\varphi'$, $\lambda$ et $\lambda'$, $\mu$ et $\mu'$, $\nu$ et $\nu'$, $\pi$ et $\pi'$. La courbe de contour cherchée passera exactement en $\varphi$ et $\varphi'$, $\nu$ et $\nu'$, parce qu'elle a les mêmes points latéraux que les sections qui passent en G et M. Quant aux autres sections, nous omettons leurs points culminants, afin de simplifier le résultat géométral, le tracé plus ou moins exact de ces courbes ayant d'ailleurs peu d'influence sur la position de leurs contacts avec la ligne de contour. Mais nous ajoutons le point $\omega$, culminant inférieur de cette ligne ou de la surface sphérique.

Digitized by Google

La surface torique du support sera coupée par deux plans à $0^m,1$ et $0^m,15$ au-dessous du point K, et les points latéraux des sections seront $\rho$ et $\rho'$, $\sigma$ et $\sigma'$; ceux de la base supérieure du cylindre, $\tau$ et $\tau'$. Les points principaux du socle sont donnés par l'énoncé.

Toutes les constructions s'exécutent fort simplement sur l'épure, une fois qu'on y a décrit les projections de la surface sur le plan géométral et le plan normal. Le choix du géométral est indifférent, mais il semble naturel de le faire passer par la base du support, de manière que la projection verticale s'appuie sur l'axe des Z. Je suppose, au reste, qu'un élève ait acquis déjà une certaine habitude de ces opérations, qui lui permette d'en varier la forme lorsqu'il le juge convenable.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| $\alpha$ | X = | 2,000 | $\alpha'$ | X = | 2,000 |
| | Y = | — 1,600 | | Y = | — 1,546 |
| | Z = | 9,395 | | Z = | 9,474 |
| $\alpha''$ | X = | 2,000 | $\beta$ | X = | 1,376 |
| | Y = | — 1,570 | | Y = | — 1,600 |
| | Z — | 10,604 | | Z = | 10,085 |
| $\beta'$ | X = | 2,609 | $\varepsilon$ | X = | 1,383 |
| | Y = | — 1,600 | | Y = | — 1,550 |
| | Z = | 9,840 | | Z = | 10,085 |
| $\varepsilon'$ | X = | 2,602 | E | X = | 2,000 |
| | Y = | — 1,550 | | Y = | — 1,550 |
| | Z = | 9,841 | | Z = | 9,378 |
| $\gamma$ | X = | 1,632 | $\gamma'$ | X = | 2,363 |
| | Y = | — 1,600 | | Y = | — 1,600 |
| | Z = | 10,060 | | Z = | 9,914 |
| C | X = | 2,000 | $\delta$ | X = | 1,687 |
| | Y = | — 1,600 | | Y = | — 1,717 |
| | Z = | 9,627 | | Z = | 10,052 |

Digitized by Google

$$\delta' \begin{cases} X = & 2,309 \\ Y = - & 1,717 \\ Z = & 9,928 \end{cases} \qquad \zeta \begin{cases} X = & 1,750 \\ Y = - & 1,800 \\ Z = & 10,043 \end{cases}$$

$$\zeta' \begin{cases} X = & 2,247 \\ Y = - & 1,800 \\ Z = & 9,944 \end{cases} \qquad \varphi \begin{cases} X = & 1,803 \\ Y = - & 2,000 \\ Z = & 10,035 \end{cases}$$

$$\varphi' \begin{cases} X = & 2,195 \\ Y = - & 2,000 \\ Z = & 9,957 \end{cases} \qquad \lambda \begin{cases} X = & 1,745 \\ Y = - & 2,371 \\ Z = & 10,044 \end{cases}$$

$$\lambda' \begin{cases} X = & 2,252 \\ Y = - & 2,371 \\ Z = & 9,943 \end{cases} \qquad \mu \begin{cases} X = & 1,576 \\ Y = - & 2,705 \\ Z = & 10,066 \end{cases}$$

$$\mu' \begin{cases} X = & 2,417 \\ Y = - & 2,705 \\ Z = & 9,900 \end{cases} \qquad \nu \begin{cases} X = & 1,475 \\ Y = - & 3,017 \\ Z = & 10,077 \end{cases}$$

$$\nu' \begin{cases} X = & 2,514 \\ Y = - & 3,017 \\ Z = & 9,869 \end{cases} \qquad \pi \begin{cases} X = & 1,568 \\ Y = - & 3,317 \\ Z = & 10,067 \end{cases}$$

$$\pi' \begin{cases} X = & 2,424 \\ Y = - & 3,317 \\ Z = & 9,896 \end{cases} \qquad \omega \begin{cases} X = & 2,000 \\ Y = - & 3,496 \\ Z = & 9,821 \end{cases}$$

$$\rho \begin{cases} X = & 1,924 \\ Y = - & 3,645 \\ Z = & 10,075 \end{cases} \qquad \rho' \begin{cases} X = & 1,924 \\ Y = - & 3,645 \\ Z = & 10,075 \end{cases}$$

$$\sigma \begin{cases} X = & 1,884 \\ Y = - & 3,695 \\ Z = & 10,022 \end{cases} \qquad \sigma' \begin{cases} X = & 2,115 \\ Y = - & 3,695 \\ Z = & 9,976 \end{cases}$$

$$\tau \begin{cases} X = & 1,753 \\ Y = - & 3,745 \\ Z = & 10,043 \end{cases} \qquad \tau' \begin{cases} X = & 2,244 \\ Y = - & 3,745 \\ Z = & 9,945. \end{cases}$$

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | mm | | | | |
| $\alpha$ | $x = 639$, $y = -511$ | $\alpha'$ | $x = 633$, $y = -490$ | $\alpha''$ | $x = 566$, $y = -444$ |
| $\beta$ | $x = 409$, $y = -476$ | $\beta'$ | $x = 795$, $y = -488$ | $\varepsilon$ | $x = 411$, $y = -461$ |
| $\varepsilon'$ | $x = 793$, $y = -473$ | $e$ | $x = 640$, $y = -496$ | $\gamma$ | $x = 487$, $y = -478$ |
| $\gamma'$ | $x = 714$, $y = -484$ | $c$ | $x = 623$, $y = -499$ | $\delta$ | $x = 504$, $y = -512$ |
| $\delta'$ | $x = 698$, $y = -519$ | $\zeta$ | $x = 523$, $y = -528$ | $\zeta'$ | $x = 678$, $y = -543$ |
| $\varphi$ | $x = 539$, $y = -598$ | $\varphi'$ | $x = 661$, $y = -603$ | $\lambda$ | $x = 521$, $y = -708$ |
| $\lambda'$ | $x = 679$, $y = -715$ | $\mu$ | $x = 470$, $y = -806$ | $\mu'$ | $x = 732$, $y = -820$ |
| $\nu$ | $x = 439$, $y = -897$ | $\nu'$ | $x = 764$, $y = -917$ | $\pi$ | $x = 467$, $y = -989$ |
| $\pi'$ | $x - 735$, $y = -1004$ | $\rho$ | $x = 573$, $y = -1086$ | $\rho'$ | $x = 623$, $y = -1096$ |
| $\sigma$ | $x = 564$, $y = -1107$ | $\sigma'$ | $x = 636$, $y = -1112$ | $\tau$ | $x = 524$, $y = -1119$ |
| $\tau'$ | $x = 679$, $y = -1130$ | $t$ | $x = 615$, $y = -1153$ | $\tau\tau'' = 18$, $tt' = 19$ | |
| $h$ | $x = 531$, $y = -1175$ | $k$ | $x = 502$, $y = -1111$ | $ho = 173$, $hh' = 37$. | |

Ayant construit, comme dans les exemples précédents, les points qui doivent appartenir au contour apparent de la surface et les arcs elliptiques auxiliaires, nous traçons sans difficulté la perspective demandée. La branche de con-

Digitized by Google

tour intérieur ne peut dépasser sensiblement ses contacts avec l'ellipse $\varepsilon c \varepsilon'$. Les branches latérales de la surface torique du support se terminent pareillement dans le voisinage de la courbe $\sigma\sigma'$.

UNE COLONNE. (*Fig.* 116.)

176. *Une colonne, de l'ordre dorique romain, a son module égal à* $0^m,3$. *La base inférieure de la plinthe est située à* $1^m,8$ *au-dessous du plan d'horizon. Le fût est conique dans toute sa longueur, et la diminution de son rayon au-dessous du congé de l'astragale est d'un sixième. On donne pour l'axe de la colonne, ou le centre de sa base :*

$$I \begin{cases} X = 3^m \\ Z = 12. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

La méthode des enveloppes perspectives est encore celle qu'il convient d'appliquer au problème. Les dimensions assez petites des cercles, comparativement à leurs distances au point de vue, rendraient plus difficile ou moins exact l'emploi de l'autre méthode. Nous en ferons usage seulement pour les tores convexes qui se remarquent dans la colonne, parce que nous tiendrons compte des petites surfaces concaves des congés sans opérations géométriques. Afin d'indiquer plus clairement les résultats des opérations, nous diviserons la surface totale en deux parties, dont l'une contiendra la base et le fût, et l'autre le chapiteau. Nous nous écarterons ainsi de l'ordre naturel des constructions, mais il sera toujours facile de le rétablir. On comprend en particulier qu'une même opération doit donner les points latéraux de tous les cercles considérés dans la surface et de toutes les sections qui y seront faites pour l'application de la méthode.

Digitized by Google

Nous supposerons d'abord déterminées les arêtes de contour apparent $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ du fût, entre les congés qui le terminent. Cette portion de la colonne doit être traitée comme un tronc de cône, bien qu'on pût, sans erreur notable, simplifier l'opération en considérant chaque base séparément comme celle d'un cylindre : les deux bases ont d'ailleurs pour rayons $0^m,3$ et $0^m,25$.

A la base de la colonne, nous construisons les points latéraux $\gamma$ et $\gamma'$ du tore, et son point culminant inférieur $\omega$, lequel est sensiblement en contact avec la plinthe; les points latéraux $\delta$ et $\delta'$ de la baguette; leurs analogues $\varepsilon$, $\varepsilon'$ du cercle inférieur de la ceinture. Nous faisons en outre dans le tore deux sections à $0^m,04$ au-dessous et au-dessus du centre du cercle générateur, et construisons leurs points latéraux $\varphi$ et $\varphi'$, $\lambda$ et $\lambda'$. Les deux points ci-dessus de la baguette et l'analogie de cette surface avec le tore assigneront suffisamment son contour.

Sur l'astragale et sa ceinture, nous nous bornerons pareillement à prendre les points latéraux $\mu$ et $\mu'$, $\nu$ et $\nu'$.

Quant à la partie supérieure, nous faisons dépendre ses surfaces courbes, des points $\delta$, $\delta'$, situés sur le contour du gorgerin, au-dessous du congé des trois filets; des points latéraux $\varepsilon$, $\varepsilon'$, du cercle supérieur des trois filets; des points analogues $\alpha$ et $\alpha'$, $\beta$ et $\beta'$, appartenant au cercle supérieur de l'ove et à une section faite dans ce tore à $0^m,04$ au-dessous du centre.

Le talon qui surmonte le tailloir se compose de surfaces cylindriques dont les intersections seraient faciles à construire géométralement, en considérant que ce sont des courbes planes, dont les plans passent par l'axe de la colonne. Mais nous éviterons cette construction, parce que ces petites courbes se rattacheront facilement au tailloir et au filet supérieur. D'ailleurs, l'une d'elles a très-peu de courbure en perspective, tandis que les deux autres ne diffèrent pas

Digitized by Google

sensiblement de leurs projections sur un plan diagonal, ce qui suffirait pour les décrire. Nous omettons également de la construction les trois filets consécutifs au-dessous de l'ove.

Les points principaux de la plinthe, du tailloir et du filet qui couronne le chapiteau se concluent immédiatement de l'énoncé et des proportions de la colonne : ils sont désignés sur les bases inférieures de ces trois solides par les lettres P, Q et R ; G, H et K ; S, U et V. Les valeurs des ordonnées Y sont aussi connues pour tous les points, et sont exclues pour cette raison du résultat géométral.

Les deux sections faites dans le tore de la base étant égales, une d'elles doit être omise de ce résultat : il en est ainsi du plus élevé des trois filets au-dessous de l'ove, parce qu'il s'aligne sur l'astragale. Nous connaissons les rayons de tous les cercles autres que les sections, et leurs points culminants, c'est-à-dire les extrémités des rayons perpendiculaires au tableau, se trouvent en conséquence déterminés : nous en emploierons quelques-uns, en les désignant par les lettres françaises correspondantes aux lettres grecques.

*Résultat géométral.*

**Base et fût de la colonne.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | m | | | | |
| $\alpha$ | X = 2,705<br>Z = 12,055 | $\alpha'$ | X = 3,292<br>Z = 11,932 | $\beta$ | X = 2,754<br>Z = 12,046 |
| $\beta'$ | X = 3,243<br>Z = 11,942 | $\gamma$ | X = 2,583<br>Z = 12,089 | $\gamma'$ | X = 3,440<br>Z = 11,882 |
| $\omega$ | X = 3,000<br>Z = 11,625 | $\delta$ | X = 2,633<br>Z = 12,080 | $\delta'$ | X = 3,361<br>Z = 11,898 |
| $\varepsilon$ | X = 2,667<br>Z = 12,074 | $\varepsilon'$ | X = 3,329<br>Z = 11,908 | $\varphi$ | X = 2,603<br>Z = 12,086 |

Digitized by Google

$\varphi'$ { X = 3,391 Z = 11,888 $\nu$ { X = 2,730 Z = 12,061 $\nu'$ { X = 3,267 Z = 11,927

$\mu$ { X = 2,716 Z = 12,064 $\mu'$ { X = 3,281 Z = 11,923.

Chapiteau.

$\delta$ { X = 2,756 Z = 12,056 $\delta'$ { X = 3,241 Z = 11,934 $\beta$ { X = 2,672 Z = 12,072

$\beta'$ { X = 2,324 Z = 11,910 $\alpha$ { X = 2,657 Z = 12,075 $\alpha'$ { X = 3,338 Z = 11,905.

*Résultat perspectif.*

Base et fût.

$\alpha$ { $x = 673$ $y = -363$ $\alpha'$ { $x = 828$ $y = -367$ $\beta$ { $x = 686$ $y = 662$

$\beta'$ { $x = 815$ $y = 668$ $\gamma$ { $x = 641$ $y = -400$ $\gamma'$ { $x = 868$ $y = -407$

$\omega$ { $x = 774$ $y = -429$ $\varphi$ { $x = 646$ $y = -409$ $\varphi'$ { $x = 856$ $y = -416$

$\lambda$ { $x = 646$ $y = -390$ $\lambda'$ { $x = 856$ $y = -396$ $\delta$ { $x = 654$ $y = -383$

$\delta'$ { $x = 847$ $y = -389$ $\varepsilon$ { $x = 663$ $y = -380$ $\varepsilon'$ { $x = 839$ $y = -385$

$e$ { $x = 772$ $y = -393$ $\varepsilon\varepsilon'' = 7$ $\varepsilon'\varepsilon''' = 7$ $\nu$ { $x = 679$ $y = 661$

$\nu'$ { $x = 822$ $y = 669$ $n$ { $x = 768$ $y = 681$ $\mu$ { $x = 675$ $y = 668$

$\mu'$ { $x = 825$ $y = 675$ $p$ { $x = 667$ $y = -466$ $r$ { $x = 621$ $y = -435$

$pq = 221$
$pp' = 35.$



Digitized by Google

Chapiteau.

$\delta \begin{cases} x = 686 \\ y = 693 \end{cases}$ $\delta' \begin{cases} x = 815 \\ y = 700 \end{cases}$ $\varepsilon \begin{cases} x = 675 \\ y = 706 \end{cases}$

$\varepsilon' \begin{cases} x = 825 \\ y = 714 \end{cases}$ $c \begin{cases} x = 769 \\ y = 727 \end{cases}$ $\beta \begin{cases} x = 664 \\ y = 710 \end{cases}$

$\beta' \begin{cases} x = 837 \\ y = 720 \end{cases}$ $\alpha \begin{cases} x = 660 \\ y = 720 \end{cases}$ $\alpha' \begin{cases} x = 841 \\ y = 731 \end{cases}$

$a \begin{cases} x = 772 \\ y = 747 \end{cases}$ $g \begin{cases} x = 680 \\ y = 747 \end{cases}$ $k \begin{cases} x = 645 \\ y = 704 \end{cases}$

$gh = 186$ $s \begin{cases} x = 673 \\ y = 772 \end{cases}$ $v \begin{cases} x = 630 \\ y = 722 \end{cases}$

$gg' = 15$

$su = 206$ $ss' = 4$.

La construction de la perspective est celle des problèmes analogues qui précèdent, les petites lignes qui ont été négligées dans l'opération géométrale ne pouvant donner lieu à aucune difficulté.

UN PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE. (*Fig.* 117.)

177. La surface gauche dont il s'agit ne peut être un paraboloïde hyperbolique complet : elle a pour limites des droites données, dans les conditions suivantes.

Soient PQ la ligne de terre d'un plan vertical de projections, et ($A_1B_1$, $A'B'$) une droite parallèle à ce plan vertical. Concevons perpendiculairement à celle-ci trois nouvelles droites : l'une ($J_1I_1K_1$, $J'I'K'$), passant par le point ($I_1$, $I'$) milieu de la première et dans un même plan vertical avec elle, par conséquent parallèle au plan vertical de projections ; et les deux autres ($C_1E_1$, $C'E'$), ($D_1F_1$, $D'F'$) ayant une égale déclinaison par rapport à ce dernier plan, mais en sens inverse. Les trois lignes ainsi déterminées sont les directrices de la surface, c'est-

Digitized by Google

à-dire que la génératrice est assujettie à s'appuyer constamment sur ces lignes : il s'ensuit que la droite donnée (AB, A'B') représente une des positions successives de la génératrice.

Dans ces hypothèses, il est clair que les directrices ont leurs projections verticales parallèles, et que leurs projections horizontales font en sens inverse des angles égaux avec PQ ou $J_1K_1$. La projection verticale de la génératrice est constamment parallèle à A'B'. Si plusieurs positions de la génératrice interceptent des parties égales sur la directrice médiane ($J_1K_1$, J'K'), les parties interceptées sur les deux autres directrices seront aussi égales, et par suite la même chose aura lieu à l'égard des projections horizontales ou verticales. En outre, la génératrice est constamment perpendiculaire à la directrice médiane, ou parallèle à un plan quelconque perpendiculaire à cette droite et qu'on nomme plan *directeur*.

Observons enfin que, réciproquement, trois positions quelconques de la génératrice pourraient être prises pour directrices; dans ce cas, la même surface serait engendrée par une droite glissant sur ces nouvelles directrices, et constamment parallèle au plan vertical qui projette $J_1K_1$ sur le plan vertical. Dans les surfaces gauches dont les directrices sont des droites, le mode de génération est toujours double.

Maintenant, désignant par A, B, C,... les points de l'espace dont les projections sont $A_1$ et A', $B_1$ et B', $C_1$ et C', etc., nous supposerons la surface limitée entre les droites CAE, DBF, et les conditions du problème seront ainsi particularisées.

AB *divise en parties égales les trois directrices, et sa longueur est de* 2 *mètres. La ligne médiane* JK $= 14^m,4$; *son inclinaison est de* 45 *degrés, et sa déclinaison* $= 5 : 1$, *de sens tels que la droite, à partir du point* J, *s'éloigne de gauche à droite et s'élève vers la droite. Les deux*



Digitized by Google

*autres directrices ont, à l'égard du plan vertical* $J_1K_1$, *une déclinaison dont le rapport* = 1 : 6, *de tels sens que le point* C *est à droite de ce dernier plan :*

$$I \begin{cases} X = & 3^m, \\ Y = & 4, \\ Z = & 30. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Le contour de la surface se compose de quatre droites d'une position absolue, et d'une courbe relative au point de vue. Nous appliquerons à cette courbe la méthode des enveloppes perspectives, et nous prendrons à cet effet quatre positions de la génératrice, savoir : la droite donnée AB, et celles qui passent par les trois premiers points de division des lignes AC et BD divisées en douze parties égales : ces droites auxiliaires, qui seront nommées GH, MN, RS, devront être mises en perspective, ainsi que AB, conformément à la méthode. Les données du problème, et particulièrement la manière dont se croisent les directrices en projections horizontales, nous font augurer que c'est dans le voisinage de ces quatre positions de la génératrice qu'est située la courbe de contour apparent.

Pour la détermination de tous les points considérés dans l'espace, la construction géométrale se trouve indiquée par les explications préliminaires, mais l'ordre des opérations doit être modifié : en voici le détail, quelque surabondant qu'il puisse être après tant d'autres constructions analogues. Prenant le plan d'horizon pour géométral, et une ligne de terre PQ ayant sa déclinaison = 6 : 1, nous assignons sur l'épure le point ($I_1$, I'), les projections verticales A'B' = 2 mètres, J'I'K', C'A'E', D'B'F', longues de $14^m,4$, inclinées de 45 degrés sur PQ, et divisées en parties égales par A'B'; puis, par le point $I_1$, la projection hori-

Digitized by Google

zontale $J_1A_1I_1B_1K_1$ parallèle à PQ, les points $J_1$, $A_1$,..., étant déterminés sur cette droite par les projections verticales J', A',...; ensuite, par les points $A_1$ et $B_1$, les projections horizontales $C_1A_1E_1$ et $D_1B_1F_1$ ayant sur $J_1K_1$ une déclinaison = 1 : 6. Si la construction est exacte, les points $J_1$ et $K_1$ sont situés sur les droites $D_1C_1$ et $F_1E_1$, qu'ils divisent, de plus, en parties égales.

Nous divisons les projections verticales et horizontales A'C', B'D' et $A_1C_1$, $B_1D_1$ en douze parties, pour prendre seulement les quatre premiers points de division, et nous mesurons finalement les coordonnées aériennes.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| A | X = | 2,86 | B | X = | 3,14 |
| | Y = | 4,71 | | Y = | 3,29 |
| | Z = | 29,31 | | Z = | 30,69 |
| C | X = | 3,04 | D | X = | 0,96 |
| | Y = | — 0,38 | | Y = | — 1,80 |
| | Z = | 24,08 | | Z = | 25,94 |
| E | X = | 2,68 | F | X = | 5,31 |
| | Y = | 9,80 | | Y = | 8,38 |
| | Z = | 34,53 | | Z = | 35,45 |
| G | X = | 2,88 | H | X = | 2,96 |
| | Y = | 4,28 | | Y = | 2,87 |
| | Z = | 28,87 | | Z = | 30,30 |
| J | X = | 2,00 | | | |
| | Y = | — 1,09 | | | |
| | Z = | 25,01. | | | |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | mm | | | | | |
| a | x = | 195 | b | x = | 204 | c | x = 253 |
| | y = | 322 | | y = | 214 | | y = — 28 |

Digitized by Google

$$d \begin{cases} x = 74 \\ y = -138 \end{cases} \quad e \begin{cases} x = 155 \\ y = 567 \end{cases} \quad f \begin{cases} x = 300 \\ y = 473 \end{cases}$$

$$g \begin{cases} x = 199 \\ y = 296 \end{cases} \quad h \begin{cases} x = 195 \\ y = 189 \end{cases} \quad m \begin{cases} x = 203 \\ y = 272 \end{cases}$$

$$n \begin{cases} x = 186 \\ y = 167 \end{cases} \quad r \begin{cases} x = 208 \\ y = 245 \end{cases} \quad s \begin{cases} x = 176 \\ y = 137 \end{cases}$$

$$j \begin{cases} x = 160 \\ y = -87 \end{cases} \quad k \begin{cases} x = 114 \\ y = 520. \end{cases}$$

Le résultat perspectif étant porté sur la toile, nous tirons les droites *ce*, *df*, *cd*, *ef*, sauf à supprimer une partie de *fd*, qui ne doit pas être totalement visible; ensuite, les transversales *ab*, *gh*, *mn*, *rs*, qui se coupent consécutivement et tangentiellement, auxquelles nous traçons la courbe de contour. La droite *df* devient invisible au point où elle se raccorde avec cette courbe, et reparaît au delà de sa rencontre avec *ce*.

Nous tirons aussi la ligne médiane *jik*, dont la rencontre avec *ab* est le point *i*. Dans l'espace, cette droite divise toutes les transversales en parties égales, et doit en conséquence les rencontrer toutes sur le tableau. Or, parmi les transversales, on en conçoit une, située entre MN et RS, qui se confond perspectivement avec *jik*; et, comme sur le tableau, ces droites sont tangentes à la courbe de contour, la droite *jik* sera nécessairement tangente à la même ligne, en un certain point, au-dessus duquel elle disparaît, pour reparaître ensuite au delà de *ec*, sur le revers de la surface. Chaque transversale n'est pareillement visible que de son point de départ sur la droite *ce* jusqu'à son contact avec la courbe.

La construction serait inexacte si tous les points *e*, *a*, *g*, *m*, *r*, *c* ne se trouvaient pas en ligne droite, de même que *f*, *b*, *h*, *n*, *s*, *d*.

La figure représente, indépendamment des transver-

Digitized by Google

sales ci-dessus, celles qui complètent la division des directrices en 24 parties égales; elles sont comparables aux échelons d'une aile de moulin à vent, et leur ensemble donne une idée plus juste du cours de la surface.

Nous aurions pu effectuer la division perspective des directrices d'après la méthode du n° 111; mais, quand on ne cherche qu'un petit nombre de points de division, il est aussi expéditif de les déterminer directement, et le résultat est toujours plus exact.

Il n'y aurait pas eu de courbe de contour apparent, si, par suite de la position de la surface relativement au point de vue, les droites *ec*, *fd* ne s'étaient pas croisées. On comprendra, par cette solution, que pour toute autre surface de même nature, quand on est incertain sur l'existence de la courbe ou sa position, il est utile de commencer par construire sur le tableau les droites *ec*, *fd*. Ces droites indiquent elles-mêmes, dans le cas où elles se croisent, vers quelles parties l'on doit chercher la courbe, en reprenant les opérations de l'épure.

UN ASSEMBLAGE DE DEUX PARABOLOÏDES. (*Fig.* 118.)

178. *Deux surfaces, de même espèce que la précédente, sont engendrées dans des conditions analogues. Les directrices médianes* JK *et* J'K' *se croisent à angles droits par leurs milieux en* I, *dans un plan vertical, et leur longueur est de* 18 *mètres; la droite* AIB *ou* A'IB', *qui représente la commune perpendiculaire aux deux autres directrices dans chaque surface, est longue de* 2 *mètres.* JK *a son inclinaison* = 4 : 3, *et sa déclinaison* = 9 : 2, *de sens tels qu'elle s'approche de gauche à droite et monte vers la droite. Les directrices* CE, DF *ont, à l'égard du plan des lignes médianes, une déclinaison en sens inverse dont le rapport* = 1 : 9, *et de telle manière que le point* C

Digitized by Google

*est à droite de ce plan; celles de l'autre surface ont la même déclinaison, de sens tels qu'elle prendrait identiquement la position de la première par un mouvement de rotation parallèle au plan des lignes médianes. On donne pour le point* I,

$$I \begin{cases} X = & 3^{m}, \\ Y = & 4, \\ Z = & 40. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Les surfaces proposées forment un système comparable aux ailes d'un moulin à vent; elles sont, en effet, susceptibles de prendre un mouvement de rotation sous la force impulsive du vent, dirigée perpendiculairement au plan des lignes médianes, et c'est l'hypothèse de l'un des problèmes ci-après. Nous remarquerons qu'elles se coupent suivant ces dernières lignes et n'ont pas d'autres points communs. Il en serait autrement si le sens de déclinaison des directrices était interverti dans le premier des paraboloïdes, en restant le même dans le second: les intersections seraient alors des courbes. C'est le cas où le mouvement de rotation par le vent se détruirait de lui-même.

Nous n'avons donc à mettre en perspective que les droites qui limitent les surfaces, et, s'il y a lieu, leurs courbes de contour apparent. Nous supposerons ces courbes suffisamment déterminéss par la condition d'être tangentes aux trois directrices de chaque surface. Du reste, la construction géométrale se rapporte à celle du problème précédent.

*Résultat géométral,*

$$C \begin{cases} X = & 2,98^{m} \\ Y = - & 3,80 \\ Z = & 44,71 \end{cases} \qquad D \begin{cases} X = & 0,68 \\ Y = - & 2,60 \\ Z = & 45,84 \end{cases}$$

Digitized by Google

$$E\begin{cases} X = 3,37 \\ Y = 10,60 \\ Z = 33,73 \end{cases} \quad F\begin{cases} X = 4,97 \\ Y = 11,80 \\ Z = 35,73 \end{cases}$$

$$J\begin{cases} X = 1,83 \\ Y = -3,20 \\ Z = 45,27 \end{cases} \quad C'\begin{cases} X = 5,67 \\ Y = -0,60 \\ Z = 32,39 \end{cases}$$

$$D'\begin{cases} X = 3,46 \\ Y = -2,20 \\ Z = 33,56 \end{cases} \quad E'\begin{cases} X = 0,59 \\ Y = 10,20 \\ Z = 46,23 \end{cases}$$

$$F'\begin{cases} X = 2,28 \\ Y = 8,60 \\ Z = 47,83 \end{cases} \quad J'\begin{cases} X = 4,56 \\ Y = -1,40 \\ Z = 32,97. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

$$c\begin{cases} x = 200^{mm} \\ y = -255 \end{cases} \quad d\begin{cases} x = 44 \\ y = -170 \end{cases} \quad e\begin{cases} x = 300 \\ y = 943 \end{cases}$$

$$f\begin{cases} x = 418 \\ y = 991 \end{cases} \quad j\begin{cases} x = 121 \\ y = -212 \end{cases} \quad k\begin{cases} x = 360 \\ y = 968 \end{cases}$$

$$c'\begin{cases} x = 525 \\ y = -56 \end{cases} \quad d'\begin{cases} x = 309 \\ y = -197 \end{cases} \quad e'\begin{cases} x = 38 \\ y = 662 \end{cases}$$

$$f'\begin{cases} x = 143 \\ y = 539 \end{cases} \quad j'\begin{cases} x = -415 \\ y = -127 \end{cases} \quad k'\begin{cases} x = 92 \\ y = 600. \end{cases}$$

La construction de ce résultat montre que les directrices de chaque surface se croisent et déterminent en conséquence deux courbes de contour, que nous traçons conformément à ce qui a été dit. Les rencontres de $j'k'$ avec $ec$ et $fd$, celles de $jk$ avec $e'c'$ et $f'd'$, sont les points $a$ et $b$, $a'$ et $b'$. La droite $ec$ devient invisible au-dessous du point $a$, la partie $ea$ se trouvant située en avant du plan des lignes médianes dans l'espace, et la partie $ac$ en arrière. Par la même raison, chacune des autres lignes disparaît au point où elle passe de l'avant à l'arrière de ce plan, et redevient visible au delà de la surface qui la cachait par son inter-

Digitized by Google

position : on s'explique ainsi l'enchevêtrement des paraboloïdes. Chaque ligne médiane, appartenant en même temps aux deux surfaces, reste visible malgré leur mutuelle superposition ; mais, ainsi que dans le numéro précédent, elle disparaît momentanément à son contact avec la courbe de contour.

UN PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE VU DE PROFIL. (*Fig.* 119.)

179. *Le plan directeur de la surface est perpendiculaire au plan normal et incliné de* 45 *degrés sur l'horizon, dans un sens tel qu'en avant du plan central il est ascendant vers ce plan. Les directrices passent respectivement par les points* M *et* N, P *et* Q, *ainsi donnés :*

$$M\begin{cases} X = \overset{m}{4}, \\ Y = -5, \\ Z = 32, \end{cases} \qquad N\begin{cases} X = -4, \\ Y = -1, \\ Z = 36, \end{cases}$$

$$P\begin{cases} X = 4, \\ Y = -5, \\ Z = 40, \end{cases} \qquad Q\begin{cases} X = -4, \\ Y = -9, \\ Z = 36. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Pour obtenir la courbe de contour apparent par la méthode des enveloppes perspectives, nous prendrons huit positions de la génératrice, celles qui divisent la directrice MN en huit parties égales : on en prendrait un plus grand nombre, si on le jugeait convenable pour l'exactitude. Or, il est facile de reconnaître à priori, d'après les conditions particulières du problème, que la génératrice, dans ses huit positions, divisera l'autre directrice PQ en autant de parties égales, et seulement dans un ordre inverse. Car, le point M étant plus rapproché que le point Q de 4 mètres du plan central, et se trouvant aussi plus élevé verticalement de 4 mètres, une droite allant de M à Q sera située dans un plan incliné de 45 degrés sur l'horizon et paral-

Digitized by Google

lèle au plan directeur; de sorte que la génératrice dans sa première position, c'est-à-dire passant par le point M, aboutira au point Q. Pareillement, on reconnaîtra que si elle part de N, elle aboutira à P, et qu'en partant des points de division de MN elle passera par les points qui divisent QP en un même nombre de parties égales.

On arrive à la même conclusion par le procédé de géométrie descriptive qu'il faudrait employer, si les données relatives aux directrices étaient différentes, et qu'il peut être intéressant de considérer. Supposant le géométral situé à 5 mètres au-dessous du plan d'horizon, et prenant un plan vertical de projections parallèle au plan central, à la distance 36 mètres, nous construisons les points M et P dans le premier plan, N et Q dans le second. $MN_1$ étant la projection horizontale de la première directrice, et NM′ sa projection verticale, soit $(A_1, A')$ un de ses points de division. Nous obtiendrons la génératrice dans la position correspondante, en faisant passer par ce point un plan parallèle au plan directeur et construisant sa rencontre avec la seconde directrice. Or, ce plan parallèle a pour trace horizontale, aussi bien que pour trace verticale, la droite TV parallèle à la ligne de terre, et que nous déterminons en prenant $A_1T = UA'$. Cette trace, considérée comme verticale, rencontre $N_1Q$ en W, et comme horizontale le prolongement de $PN_1$ en V, point qui se projette verticalement en V′. Nous tirons donc V′W, dont la rencontre R′ avec QM′ est la projection verticale du point cherché : sa projection horizontale $R_1$ s'ensuit. Mais il est manifeste que le triangle V′SR′, auquel conduit cette construction, égale le triangle $N_1UA_1$, et que la distance du point $(R_1, R')$ au point Q ne diffère pas de celle du point $(A_1, A')$ au point M.

Il suit de là que les valeurs des coordonnées des points consécutifs, sur les deux droites augmentent ou diminuent graduellement d'une même quantité, qu'on obtient en

Digitized by Google

divisant par 8 les différences des coordonnées extrêmes. Cette considération nous dispenserait d'énoncer le résultat géométral, et nous permet du moins de le réduire à deux points de chaque droite. Les points de division de MN sont représentés par les lettres A, B, C, D,..., et ceux de QP, correspondants aux premiers, sont R, L, O, K,.... Les points D et K sont dans le plan normal, et la droite qui doit les joindre, inclinée de 45 degrés dans l'espace, se confondra sur le tableau avec la ligne normale. Ces points sont en conséquence inutiles pour la construction de la perspective.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| A | X = | 3,0 | B | X = | 2, |
| | Y = | — 4,5 | | Y = | — 4, |
| | Z = | — 32,5 | | Z = | 33, |
| R | X = | — 3,0 | L | X = | — 2, |
| | Y = | — 8,5 | | Y = | — 8, |
| | Z = | 36,5 | | Z = | 37. |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | mm | | | | | | |
| *m* | $x =$ | 250 | *a* | $x =$ | 185 | *b* | $x =$ | 121 |
| | $y =$ | — 316 | | $y =$ | — 277 | | $y =$ | — 242 |
| *c* | $x =$ | 60 | *d* | $x =$ | 000 | *e* | $x =$ | — 58 |
| | $y =$ | — 209 | | $y =$ | — 176 | | $y =$ | — 145 |
| *f* | $x =$ | — 114 | *g* | $x =$ | — 169 | *n* | $x =$ | — 222 |
| | $y =$ | — 114 | | $y =$ | — 85 | | $y =$ | — 56 |
| *q* | $x =$ | — 222 | *r* | $x =$ | — 164 | *l* | $x =$ | — 108 |
| | $y =$ | — 500 | | $y =$ | — 466 | | $y =$ | — 432 |
| *o* | $x =$ | — 53 | *k* | $x =$ | 000 | *j* | $x =$ | 52 |
| | $y =$ | — 400 | | $y =$ | — 368 | | $y =$ | — 338 |
| *i* | $x =$ | 103 | *h* | $x =$ | 152 | *p* | $x =$ | 200 |
| | $y =$ | — 308 | | $y =$ | — 278 | | $y =$ | — 250. |

Digitized by Google

Nous construisons avec ces valeurs les droites *mn*, *pq*, les transversales *mq*, *ar*, *bl*, *co*,..., *np*, et nous décrivons tangentiellement à celles-ci la courbe demandée. Ces transversales, si elles étaient en nombre infini, composeraient la surface. Menées des points *a*, *b*, *c*,..., elles sont visibles jusqu'à leurs contacts avec la courbe, et disparaissent ensuite. La surface est symétrique par rapport au plan vertical de projections dont nous avons fait usage ci-dessus, et sa position est celle qui donne la plus grande courbure à la ligne de contour apparent : le titre du problème indique pour cette raison qu'elle est vue de profil. Mais les arêtes s'étendent à l'infini dans de telles directions, que la perspective ne peut représenter parfaitement son cours.

Le problème se résoudrait de la même manière, si l'on prenait pour directrices les deux transversales MQ, NP, et le plan directeur toujours incliné de 45 degrés, mais en sens inverse du précédent. Les directrices primitives deviendraient deux positions de la nouvelle génératrice (*).

On peut s'exercer, sans plus de difficulté, à représenter le paraboloïde vu de face, en supposant que le point de vue se transporte dans le plan vertical de symétrie. On obtiendra une hyperbole, courbe à deux branches opposées.

---

(*) On sait que le paraboloïde hyperbolique peut également être engendré par le mouvement d'une parabole, constamment parallèle à un même plan, dont le sommet glisse sur une autre parabole ayant son axe parallèle et son plan perpendiculaire au premier plan. Le nom donné à la surface tient à cette propriété, que les sections planes peuvent être des paraboles ou des hyperboles, ce qui la distingue du *paraboloïde elliptique*. Dans le cas particulier du problème, la parabole génératrice est verticale et parallèle au tableau; la parabole directrice est horizontale : elles ont l'une et l'autre le même paramètre, et chacune d'elles rapportée à ses axes a pour équation $y^2 = 4x$, le mètre étant l'unité. On conçoit que la courbe de contour apparent dans l'espace diffère peu de la parabole génératrice dans le plan vertical de symétrie : cette courbe et sa perspective sont des paraboles.

Digitized by Google

UN MOULIN A VENT A SURFACES GAUCHES. (*Fig.* 120.)

180. *Les ailes d'un moulin à vent, dont on néglige les épaisseurs, sont des surfaces gauches de l'espèce des paraboloïdes hyperboliques et engendrées comme celles des n^os^* 177 *et* 178. *Les lignes médianes sont longues de* 14 *mètres et se coupent à angles droits. Une d'elles,* JK, *a son inclinaison* = 1 : 2, *de tel sens qu'elle s'éloigne en même temps qu'elle s'élève. Le plan vertical des lignes médianes a sa déclinaison* = 7 : 5, *sa trace s'éloignant de gauche à droite. Les directrices qui bordent les ailes ont sur ce plan une déclinaison* = 1 : 14; *le point* C *est à droite du même plan, et les deux ailes sont construites de manière à prendre successivement des positions identiques. La commune perpendiculaire des directrices, dans chaque aile, est de* 1 *mètre. Les surfaces sont interrompues, tant en deçà qu'au delà du centre, à la distance* $0^m,5$ *de ce point, cette distance étant mesurée sur les lignes médianes. On donne pour le centre de rotation:*

$$I \begin{cases} X = & 2^m, \\ Y = & 1, \\ Z = & 40. \end{cases}$$

*L'édifice a pour base un rectangle long de* 5 *mètres, large de* 4 *mètres, du côté des ailes. Les murs sont hauts de* $7^m,4$. *Le toit est un cylindre demi-circulaire. L'essieu, que l'on réduit à une ligne droite, coïncide avec l'axe de ce cylindre, et fait une saillie* LI = $1^m,3$.

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Si l'on opère d'abord pour les directrices qui bordent les ailes et qu'on les construise sur le tableau, on trouve qu'elles ne se rencontrent pas dans les limites de leur étendue. La perspective des surfaces gauches proposées est en

Digitized by Google

conséquence complétement rectiligne, ce qui résulte du peu de déviation des directrices par rapport au plan des lignes médianes, en même temps que de leur position relative au point de vue. Nous déterminons les extrémités de ces droites par la construction géométrale connue, ainsi que les points principaux de l'édifice et l'arête $\alpha 6$ de contour apparent de la surface cylindrique. La figure indique assez clairement les points auxquels s'appliquent les résultats ci-dessous.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| C | X = | — 1,45 | D | X = | — 1,79 |
| | Y = | — 1,24 | | Y = | — 3,03 |
| | Z = | 34,25 | | Z = | 35,56 |
| E | X = | 4,98 | F | X = | 6,30 |
| | Y = | 5,02 | | Y = | 3,24 |
| | Z = | 45,02 | | Z = | 45,17 |
| G | X = | 1,51 | H | X = | 1,97 |
| | Y = | 1,67 | | Y = | — 0,12 |
| | Z = | 39,25 | | Z = | 40,02 |
| C′ | X = | 3,71 | D′ | X = | 3,93 |
| | Y = | — 5,71 | | Y = | — 4,81 |
| | Z = | 41,53 | | Z = | 43,57 |
| E′ | X = | — 0,75 | F′ | X = | 1,20 |
| | Y = | 6,81 | | Y = | 7,71 |
| | Z = | 37,02 | | Z = | 37,89 |
| G′ | X = | 1,64 | H′ | X = | 2,62 |
| | Y = | 0,10 | | Y = | 1,00 |
| | Z = | 39,43 | | Z = | 40,93 |
| L | X = | 0,94 | α | X = | 0,84 |
| | Y = | 1,00 | | Y = | 2,99 |
| | Z = | 40,76 | | Z = | 40,61 |

Digitized by Google

$$6 \begin{cases} X = -\ 3{,}23 \\ Y = \ \ 2{,}99 \\ Z = \ 43{,}51 \end{cases} \qquad P \begin{cases} X = -\ 0{,}22 \\ Y = \ \ 1{,}00 \\ Z = \ 39{,}13. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $x = 100^{mm}$, $y = 50$ | $c$ | $x = -85$, $y = -73$ | $d$ | $x = -101$, $y = -171$ |
| $e$ | $x = 221$, $y = 223$ | $f$ | $x = 276$, $y = 144$ | $g$ | $x = 77$, $y = 85$ |
| $h$ | $x = 98$, $y = 6$ | $m$ | $x = 98$, $y = 106$ | $n$ | $x = 125$, $y = 16$ |
| $c'$ | $x = 179$, $y = -275$ | $d'$ | $x = 180$, $y = -221$ | $e'$ | $x = -41$, $y = 368$ |
| $f'$ | $x = 59$, $y = 425$ | $g'$ | $x = 83$, $y = 5$ | $h'$ | $x = 128$, $y = 49$ |
| $m'$ | $x = 68$, $y = 51$ | $n'$ | $x = 119$, $y = 99$ | $j$ | $x = -93$, $y = -122$ |
| $j'$ | $x = 180$, $y = -247$ | $l$ | $x = 46$, $y = 49$ | $\alpha$ | $x = 41$, $y = 147$ |
| $6$ | $x = -149$, $y = 137$ | $p$ | $x = -11$, $y = 51$ | $q$ | $x = 99$, $y = 47$ |
| $r$ | $x = -202$, $y = 47$ | | $pp' = 378$, $qq' = 349$ | | $rr' = 352.$ |

La construction de la perspective est immédiate. Nous trouvons, après l'avoir effectuée, que les points $m'$, $m$, $h'$, $h$, $\alpha$ sont invisibles et servent seulement à déterminer les directions des lignes auxquelles ils appartiennent. Les quatre points $c$, $g$, $m$, $e$ doivent être en ligne droite, de même que $d$, $h$, $n$, $f$, et leurs analogues sur l'autre aile.

Digitized by Google

UN HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE, DE RÉVOLUTION. (*Fig.* 121.)

181. Nous rappellerons d'abord que l'hyperboloïde à une nappe, de révolution, lorsqu'il est considéré comme surface réglée, est engendré par la révolution d'une droite autour d'une autre non parallèle. Chaque point de la droite mobile décrit donc un cercle dont le centre est sur la droite fixe. Le point le plus rapproché de celle-ci décrit en particulier le *cercle de gorge*, tandis que les deux extrémités de la génératrice, si elle n'est pas prolongée à l'infini, tracent les bases de la surface. Dans le cas où l'axe de révolution est vertical, la génératrice conserve évidemment une inclinaison constante sur le plan d'horizon, et sa projection horizontale dans toutes ses positions est tangente à la projection du cercle de gorge. Cela posé :

*Les deux bases de l'hyperboloïde du problème sont égales et ont 4 mètres de rayon; le cercle de gorge a 2 mètres. L'axe de révolution est vertical et la génératrice est inclinée de 45 degrés sur l'horizon. On donne pour le centre de la base inférieure :*

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l} X = \quad 0^{m}, \\ Y = -10, \\ Z = \quad 36. \end{array}\right.$$

*La distance centrale* = 2 *mètres*.

Ce problème est un de ceux où l'emploi de la méthode des enveloppes perspectives est le plus facile. Nous prenons les positions de la génératrice qui divisent les circonférences des bases en 24 parties égales, à partir des diamètres perpendiculaires au tableau, les points de division étant désignés par A, B, C,..., A′, B′, C′,...: quelques-unes des arêtes de la surface, obtenues suivant cette convention, ne contribueront pas à la détermination de la



Digitized by Google

courbe de contour apparent, mais elles rendront la représentation perspective plus complète.

Les cordes des bases qui interceptent huit divisions se trouvent tangentes à la projection du cercle de gorge, en vertu des conditions particulières de l'énoncé : elles sont donc les projections des arêtes de la surface, c'est-à-dire des 24 positions de la génératrice. Nous prenons sur l'épure les ordonnées géométrales de leurs extrémités. L'inclinaison de ces droites étant de 45 degrés, la distance des deux bases, ou la hauteur de l'hyperboloïde, égale la longueur des projections, ce qui détermine les ordonnées Y des points de la base supérieure. Ces projections étant des cordes qui soutendent des arcs de 120 degrés, on peut les calculer par cette considération, et on les trouvera égales à $6^m,93$ à moins de 1 centimètre près.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B | X = | — 1,04 m | C | X = | — 2,00 |
| | Z = | 39,86 | | Z = | 39,46 |
| D | X = | — 2,83 | E | X = | — 3,46 |
| | Z = | 38,83 | | Z = | 38,00 |
| F | X = | — 3,86 | | | |
| | Z = | 37,04. | | | |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | $x =$ | 000 mm | *b* | $x =$ | — 52 | *c* | $x =$ | — 101 |
| | $y =$ | — 500 | | $y =$ | — 502 | | $y =$ | — 507 |
| *d* | $x =$ | — 146 | *e* | $x =$ | — 182 | *f* | $x =$ | — 209 |
| | $y =$ | — 515 | | $y =$ | — 526 | | $y =$ | — 540 |
| *g* | $x =$ | — 222 | *h* | $x =$ | — 221 | *j* | $x =$ | — 204 |
| | $y =$ | — 555 | | $y =$ | — 572 | | $y =$ | — 588 |
| *k* | $x =$ | — 171 | *l* | $x =$ | — 123 | *m* | $x =$ | — 64 |
| | $y =$ | — 603 | | $y =$ | — 614 | | $y =$ | — 522 |

Digitized by Google

| | | |
|---|---|---|
| $n \begin{cases} x = 000 \\ y = -625 \end{cases}$ | $a' \{ y = -154$ | $b' \{ y = -154$ |
| $c' \{ y = -156$ | $d' \{ y = -158$ | $e' \{ y = -162$ |
| $f' \{ y = -166$ | $g' \{ y = -171$ | $h' \{ y = -176$ |
| $j' \{ y = -181$ | $k' \{ y = -185$ | $l' \{ y = -189$ |
| $m' \{ y = -191$ | $n' \{ y = -192.$ | |

La construction de la perspective se réduit à celle de ces points et des lignes de jonction $aj'$, $bk'$, $cl'$,.... En vertu de la symétrie, les points situés à gauche sur les circonférences des bases déterminent ceux qui sont à droite. On pourrait se servir des points au delà des horizontales $gt$, $g't'$, pour construire ceux en deçà; mais la construction directe est préférable. On voit que les arêtes qui contribuent à déterminer les deux branches du contour se coupent assez obliquement pour qu'on soit dispensé de tracer cette courbe, qu'elles figurent par leurs intersections; sur chaque droite, le point de contact limite la partie visible, qui est représentée à plein trait.

En joignant les points de division dans un ordre inverse, c'est-à-dire de $a$ en $r'$, de $b$ en $s'$,..., on obtient la perspective du même hyperboloïde, suivant son second mode de génération de surface réglée (*). La *fig. a* suppose à la fois les deux modes.

---

(*) L'hyperboloïde à une nappe de révolution, pouvant également être engendré par la révolution d'une hyperbole autour de son axe non transverse, on remarquera que, dans le cas du problème, l'hyperbole génératrice est équilatère: rapportée à ses axes, elle a manifestement pour équation $y^2 - x^2 = -4$, le mètre étant l'unité de longueur. La courbe de contour apparent et sa perspective sont aussi hyperboliques, la première différant peu de celle qui engendre la surface.

On peut supposer le point de vue assez élevé pour qu'il y ait une courbe de contour intérieur; mais on aurait tort de penser que cette courbe se rattache à des branches latérales comme celles d'une surface torique. On sait que le cône asymptotique est celui dont le sommet est au centre du



Digitized by Google

UN HÉLIÇOÏDE GAUCHE. (*Fig.* 122.)

182. *Deux cercles concentriques* $AD_1L_1$, $\alpha\delta_1\lambda_1$, *des rayons* $2^m,4$ *et* 1 *mètre, sont les projections horizontales de deux hélices ayant un même axe vertical, et leurs spires d'une même hauteur égale à* $2^m,8$. *Ces courbes ont leur origine en* A *et* $\alpha$, *sur un même rayon perpendiculaire au tableau, et à partir de ces points elles tournent de gauche à droite; elles se composent de trois spires: une droite horizontale, glissant sur les hélices, engendre la surface. On donne pour le centre commun des cercles:*

$$\text{I}\begin{cases} X = \overset{m}{2,0} \\ Y = -1,6 \\ Z = 9,0. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Dans l'espace, l'héliçoïde proposé est totalement compris entre les deux hélices, et cependant sa courbure donne naissance à certaines courbes de contour apparent, que nous devrons obtenir par la méthode des enveloppes perspectives. Du reste, l'opération est très-simple.

Nous divisons les circonférences en 12 parties égales aux points A, $B_1$, $C'_1$, $D_1$, ..., $\alpha$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$, ..., dont nous prenons les ordonnées géométrales. Nous connaissons les hauteurs des points B, C, D, ..., $\beta$, $\gamma$, $\delta$, ... au-dessus de leurs projections, ou du moins nous pouvons les calculer immédiatement, en observant qu'elles croissent consécutive-

---

cercle de gorge et les arêtes parallèles à celles de l'hyperboloïde. Or, si le point de vue est situé entre la surface et le cône, la courbe de contour est une hyperbole dont une branche est en avant du point de vue et au-dessous, tandis que l'autre est en arrière et au-dessus, sur un prolongement de la nappe. Si le même point s'élève jusqu'à la surface du cône asymptotique, la courbe est une parabole; et s'il pénètre dans l'intérieur, elle devient une ellipse.

Digitized by Google

ment d'un douzième de la hauteur spirale, c'est-à-dire de $0^m,2333$. Ces éléments suffisent pour la détermination des hélices, mais il faudrait diminuer les intervalles des points, si l'on demandait une grande exactitude.

Les parties du contour apparent qui seront déterminées comme enveloppes perspectives, n'exigent pas de nouvelles constructions sur l'épure. Nous les ferons dépendre des positions de la génératrice passant par quelques-uns des points qui serviront au tracé des hélices.

Nous pourrions faire usage aussi des points latéraux des ellipses qui doivent représenter les projections. Quatre verticales élevées par ces points auraient la propriété d'être tangentes à toutes les spires, qu'elles limiteraient en conséquence sur le tableau; mais on reconnaîtrait, en les construisant, que trois de ces verticales se confondraient sensiblement avec celles qui passent par les points $c$, $o$ et $\omega$; la quatrième passerait un peu à droite du point $\gamma$.

La marche que nous suivrons est celle qui réduit le plus la détermination directe des points : elle consiste à construire immédiatement sur le tableau la grande hélice, la projection de la petite et l'axe de révolution $ii'$ dans la hauteur de deux spires. La petite hélice se conclura de ces données. Les points $a'$, $b'$, $c'$, ..., $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, ..., $a''$, $b''$, $c''$, ..., désigneront les analogues de $a$, $b$, $c$, ..., $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., sur les secondes et troisièmes spires.

*Résultat géométral.*

$$B \begin{cases} X = 3^m,200 \\ Z = 6,922 \end{cases} \qquad C \begin{cases} X = 4,078 \\ Z = 7,800 \end{cases}$$

$$\beta_1 \begin{cases} X = 2,500 \\ Z = 8,133 \end{cases} \qquad \gamma_1 \begin{cases} X = 2,867 \\ Z = 8,500. \end{cases}$$

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

| | | |
|---|---|---|
| $a \begin{cases} x = 606^{mm} \\ y = -485 \end{cases}$ | $b \begin{cases} x = 925 \\ y = -395 \end{cases}$ | $c \begin{cases} x = 1046 \\ y = -291 \end{cases}$ |
| $d \begin{cases} x = 978 \\ y = -200 \end{cases}$ | $e \begin{cases} x = 800 \\ y = -131 \end{cases}$ | $f \begin{cases} x = 578 \\ y = -78 \end{cases}$ |
| $l \begin{cases} x = 351 \\ y = -35 \end{cases}$ | $m \begin{cases} x = 144 \\ y = 6 \end{cases}$ | $n \begin{cases} x = -15 \\ y = 52 \end{cases}$ |
| $o \begin{cases} x = -89 \\ y = 111 \end{cases}$ | $p \begin{cases} x = -20 \\ y = 188 \end{cases}$ | $r \begin{cases} x = 231 \\ y = 279 \end{cases}$ |
| $aa' = 849$ | $cc' = 718$ | $ee' = 549$ |
| $bb' = 809$ | $dd' = 622$ | $ff' = 505$ |
| $ll' = 491$ | $\alpha \begin{cases} x = 500 \\ y = -400 \end{cases}$ | $\beta_1 \begin{cases} x = 615 \\ y = -394 \end{cases}$ |
| $\gamma_1 \begin{cases} x = 675 \\ y = -376 \end{cases}$ | $\delta_1 \begin{cases} x = 667 \\ y = -356 \end{cases}$ | $\varepsilon_1 \begin{cases} x = 604 \\ y = -337 \end{cases}$ |
| $\varphi_1 \begin{cases} x = 507 \\ y = -324 \end{cases}$ | $\lambda_1 \begin{cases} x = 400 \\ y = -320 \end{cases}$ | $ii' = 1244.$ |

Nous construisons sur la toile, au moyen de ces valeurs, les deux premières spires de la grande hélice et la projection de la petite, les points $\beta_1, \gamma_1, \delta_1$, à droite du diamètre $\alpha\lambda_1$, déterminant ceux qui sont à gauche. Les valeurs $rr'$, $pp'$,... ne figurent pas dans le résultat perspectif, parce qu'elles sont respectivement égales à $bb'$, $cc'$, ∴...

Par les points $\alpha$, $\beta_1$, $\gamma_1$,... de cette projection, nous élevons des verticales indéfinies, et par le point $i$, rencontre des droites $\alpha\lambda_1$, $\delta_1$, $\omega_1$, la verticale $ii'$, longue de 1244 millimètres. Nous divisons celle-ci en 24 parties égales, et joignons respectivement les points de division aux points de la grande hélice, par des droites qui représentent les positions de la génératrice. Les points $\beta$, $\delta$, $\gamma$,..., où ces droites rencontrent les verticales ci-dessus, appartiennent

Digitized by Google

à la petite hélice. Cela résulte manifestement de ce que la génératrice dans l'espace, prolongée jusqu'à l'axe de l'héliçoïde, intercepte sur cette droite des parties égales dans les positions que nous considérons.

Nous obtenons les troisièmes spires, en prenant sur les verticales menées par tous les points les longueurs $a'a''=aa'$, $b'b''=bb'$, ..., $\alpha'\alpha''=\alpha\alpha'$, $\beta'\beta''=\beta\beta'$, .... Les mêmes longueurs, ajoutées de nouveau, donneraient les spires supérieures si on les demandait, les hélices pouvant ainsi se continuer indéfiniment.

Il nous reste à chercher dans quelles parties de l'héliçoïde les lignes de contour sont dues à la courbure de cette surface. Le cas ne peut arriver qu'autant que la génératrice, prise dans des positions suffisamment rapprochées, se trouve représentée par des droites qui se croisent dans les limites de leur étendue entre les hélices : nous savons, en effet, que le contour apparent est alors formé par les intersections successives de ces droites. Or, un tel croisement aurait nécessairement lieu pour des positions très-rapprochées entre $f\varphi$ et $l\lambda$, comme l'indique sur une plus grande échelle la *fig. b*. Nous traçons donc une courbe tangentiellement aux arêtes qui se croisent dans cet intervalle. L'arc $efl$ de la grande hélice disparaît à sa rencontre avec la petite, et il redevient visible en se raccordant avec cette courbe.

Dans les secondes spires, des circonstances analogues se reproduisent deux fois. Les droites $a'\alpha'$, $b'\beta'$, $c'\gamma'$ ont évidemment de telles directions, qu'elles se croiseraient si elles étaient consécutivement moins distantes. En conséquence, nous décrivons une courbe qui se raccorde avec les hélices un peu au-dessus de $\alpha'$ et au-dessous de $c'$. La petite hélice devient invisible au premier point de raccord, pour reparaître au-dessus de sa rencontre avec la grande. De même, les droites $d'\delta'$, $e'\varepsilon'$ se croisent, d'où résultent

Digitized by Google

encore une courbe de contour apparent et une disparition momentanée de la grande hélice.

Chacune des troisièmes spires fait un nœud qui les rend invisibles dans une partie de leur cours, mais n'engendre pas de nouvelle courbe de contour. Il en serait autrement dans le cas où le nœud serait formé seulement par la grande hélice, ce qui arriverait si l'on augmentait un peu la distance de la surface au point de vue.

La figure représente la projection de la grande hélice, aussi bien que celle de la petite : on l'obtient en prolongeant inférieurement les verticales $b'b$, $c'c$, ... jusqu'à leurs rencontres avec les droites $i\beta_1$, $i\gamma_1$, etc.

Cette manière de résoudre le problème nous a conduit à tracer en assez grand nombre des lignes auxiliaires. Il serait donc préférable dans la pratique de déterminer directement tous les points des deux premières spires de chaque hélice, dont le calcul est d'ailleurs si facile. Les arêtes prolongées devraient intercepter sur $ii'$ des parties égales, ce qui vérifierait l'opération. Mais, ainsi que nous en avons fait la remarque dans d'autres occasions, on peut trouver un exercice utile de théorie dans la construction d'une perspective avec un petit nombre d'éléments primitifs et la loi de leur liaison mutuelle.

UN ESCALIER EN VIS A JOUR. (*Fig.* 123.)

183. *Les arêtes des angles saillants des marches aboutissent à deux hélices, qui se projettent horizontalement suivant les cercles* $AB_1C_1, \ldots, \alpha\beta_1\gamma_1, \ldots$, *des rayons* 2 *mètres et* $0^m,8$, *concentriques en* I. *Les arêtes des angles rentrants s'appuient sur deux hélices de mêmes projections que les précédentes, qui partent des points* A *et* $\alpha$, *extrémités de rayons déclinant de* 45 *degrés. Deux hélices inférieures, dont la distance aux secondes égale*

Digitized by Google

*celle des secondes aux premières, limitent l'épaisseur du plafonage. La hauteur spirale est* $2^m,8$ *pour toutes les hélices, et celle des marches* $0^m,175$, *d'où il suit qu'il y a* 16 *marches dans chaque spire. A leurs points de départ les courbes tournent de droite à gauche, et l'on ne considère que deux spires dans chacune d'elles :*

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l} X = \quad 1^m,0 \\ Y = -\ 1,4 \\ Z = \quad 10,0. \end{array}\right.$$

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Nous prenons naturellement, pour déterminer les diverses hélices du système, ceux de leurs points qui divisent les circonférences des bases en 16 parties égales, puisqu'ils correspondent aux arêtes des marches. Les ordonnées géométrales sont mesurées sur l'épure, et les ordonnées Y se concluent des hauteurs verticales, lesquelles croissent consécutivement de $0^m,175$. Si la surface héliçoïde gauche qui forme le revers de l'escalier donne naissance à de nouvelles courbes de contour, nous les obtiendrons par la méthode qui nous est devenue familière.

Nous procéderons autrement que dans le problème de l'héliçoïde, et nous assignerons d'une manière plus directe la position de chaque point. Les points des trois grandes hélices seront désignés, dans l'ordre des élévations verticales, par $a''$, $a$ et $a'$, $b''$, $b$ et $b'$,... sur la première spire, et sur la seconde par $a''_1$, $a_1$ et $a'_1$, $b''_1$, $b_1$ et $b'_1$, etc. Même notation pour les trois autres.

*Résultat géométral.*

$$\mathrm{A}\left\{\begin{array}{l} X = 2^m,414 \\ Z = 8,586 \end{array}\right. \qquad \mathrm{B}\left\{\begin{array}{l} X = 1,765 \\ Z = 8,152 \end{array}\right. \qquad \mathrm{F}\left\{\begin{array}{l} X = -0,848 \\ Z = \quad 9,235 \end{array}\right.$$

$$\alpha\left\{\begin{array}{l} X = 1,566 \\ Z = 9,434 \end{array}\right. \qquad \beta\left\{\begin{array}{l} X = 1,306 \\ y = 9,261 \end{array}\right. \qquad \varphi\left\{\begin{array}{l} X = \quad 0,261 \\ Z = \quad 9,694 \end{array}\right.$$

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

| | | |
|---|---|---|
| $i \begin{cases} x = 200^{mm} \\ y = -280 \end{cases}$ | $a \begin{cases} x = -562 \\ y = -326 \end{cases}$ | $b \begin{cases} x = 433 \\ y = -301 \end{cases}$ |
| $c \begin{cases} x = 250 \\ y = -262 \end{cases}$ | $d \begin{cases} x = 58 \\ y = -214 \end{cases}$ | $e \begin{cases} x = -96 \\ y = -163 \end{cases}$ |
| $f \begin{cases} x = -184 \\ y = -114 \end{cases}$ | $k \begin{cases} x = -200 \\ y = -70 \end{cases}$ | $l \begin{cases} x = -158 \\ y = -33 \end{cases}$ |
| $m \begin{cases} x = -73 \\ y = 000 \end{cases}$ | $n \begin{cases} x = 40 \\ y = 29 \end{cases}$ | $o \begin{cases} x = 167 \\ y = 58 \end{cases}$ |
| $p \begin{cases} x = 298 \\ y = 89 \end{cases}$ | $r \begin{cases} x = 423 \\ y = 123 \end{cases}$ | $s \begin{cases} x = 529 \\ y = 161 \end{cases}$ |
| $t \begin{cases} x = 600 \\ y = 210 \end{cases}$ | $u \begin{cases} x = 617 \\ y = 265 \end{cases}$ | $cc' = 44$<br>$cc_1 = 700$ |
| $dd' = 43$<br>$dd_1 = 687$ | $ee' = 41$<br>$ee_1 = 653$ | $ff' = 38$<br>$ff_1 = 606$ |
| $kk' = 35$<br>$kk_1 = 560$ | $ll' = 33$<br>$ll_1 = 520$ | $mm' = 31$<br>$mm_1 = 491$ |
| $nn' = 29$<br>$nn_1 = 472$ | $oo' = 29$<br>$oo_1 = 467$ | $\alpha \begin{cases} x = 332 \\ y = -297 \end{cases}$ |
| $\beta \begin{cases} x = 282 \\ y = -264 \end{cases}$ | $\gamma \begin{cases} x = 217 \\ y = -228 \end{cases}$ | $\delta \begin{cases} x = 150 \\ y = -189 \end{cases}$ |
| $\varepsilon \begin{cases} x = 92 \\ y = -148 \end{cases}$ | $\varphi \begin{cases} x = 54 \\ y = -108 \end{cases}$ | $\varkappa \begin{cases} x = 40 \\ y = -70 \end{cases}$ |
| $\lambda \begin{cases} x = 51 \\ y = -34 \end{cases}$ | $\mu \begin{cases} x = 82 \\ y = -00 \end{cases}$ | $\nu \begin{cases} x = 130 \\ y = 33 \end{cases}$ |
| $\omega \begin{cases} x = 185 \\ y = 65 \end{cases}$ | $\pi \begin{cases} x = 243 \\ y = 97 \end{cases}$ | $\rho \begin{cases} x = 297 \\ y = 133 \end{cases}$ |
| $\sigma \begin{cases} x = 337 \\ y = 170 \end{cases}$ | $\tau \begin{cases} x = 360 \\ y = 210 \end{cases}$ | $\upsilon \begin{cases} x = 369 \\ y = 253 \end{cases}$ |

Digitized by Google

| | | |
|---|---|---|
| $\gamma\gamma' = 38$ | $\delta\delta' = 38$ | $\varepsilon\varepsilon' = 37$ |
| $\gamma\gamma_1 = 608$ | $\delta\delta_1 = 605$ | $\varepsilon\varepsilon_1 = 594$ |
| $\varphi\varphi' = 36$ | $\varkappa\varkappa' = 35$ | $\lambda\lambda' = 34$ |
| $\varphi\varphi_1 = 576$ | $\varkappa\varkappa_1 = 560$ | $\lambda\lambda_1 = 544$ |
| $\mu\mu' = 33$ | $\nu\nu' = 32$ | $\omega\omega' = 32$ |
| $\mu\mu_1 = 529$ | $\nu\nu_1 = 522$ | $\omega\omega_1 = 518.$ |

Le résultat perspectif et les lignes qu'il détermine se construisent sans difficulté. Pour plus d'uniformité, il contient explicitement tous les points des deux hélices *abc*,..., $\alpha\beta\gamma$,..., qu'ils soient visibles ou non, ces points servant à déterminer ceux qui peuvent être visibles sur les mêmes verticales. Ainsi, par exemple, le point *c* donnera $c'$ et $c''$, en prenant la verticale $cc'' = cc' = 44$ millimètres; le point $\gamma_1$, qui n'est pas visible, donnera pareillement le point visible $\gamma''_1$. Mais la détermination directe de ce dernier point eût été aussi simple et préférable, en ce qu'elle éviterait l'accumulation des erreurs graphiques et de calcul : c'est une observation qui s'applique aux cas semblables, dans tout autre problème. Les distances verticales des points, indiquées pour la gauche, sont les mêmes à droite.

Les arêtes transversales des marches, prolongées suffisamment, intercepteraient sur $\ddot{u}'$ des parties égales, propriété dont on pourrait faire usage pour une partie de la construction. Quant à celles de la portion visible de l'hyperboloïde, nous trouvons que, si on les traçait, elles ne se croiseraient nulle part, d'où il suit que le contour apparent de cette surface est uniquement formé par les hélices.

Les faces latérales des marches sont dans des plans qui ne peuvent se raccorder parfaitement avec les surfaces cylindriques de l'escalier. De là résultent des courbes d'intersection qu'on peut, sans erreur sensible, réduire à des lignes droites. De *e* en *f* par exemple, il y a une ligne *ef*, intersection du plan vertical *ee'f* avec l'héliçoïde qui aurait

Digitized by Google

pour directrices les deux hélices sur lesquelles s'appuient les marches. Ces lignes d'intersection deviennent invisibles dans la seconde spire extérieure de $u_1$ en $k_1$, par la convexité de l'hélice. A l'intérieur, au contraire, elles rendent invisibles les arcs convexes de l'hélice, comme de $\lambda$ à $\mu$.

UNE VIS A FILET TRIANGULAIRE. (*Fig.* 124.)

**184.** *La surface de la vis proposée est engendrée par le mouvement en hélice d'un triangle isocèle dont le plan passe constamment par l'axe vertical* II', *et dont la base est parallèle à cet axe. Les hélices décrites, d'une part, par les extrémités de la base, et, d'autre part, par le sommet du triangle, se projettent suivant les cercles* $AB_1C_1\ldots$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$, *des rayons* 2 *mètres et* 1 *mètre. Le point* A, *situé sur un rayon* AI *perpendiculaire au tableau, est l'origine de la grande hélice, laquelle, à partir de ce point, tourne de gauche à droite. La hauteur spirale est* $1^m,8$ :

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l} X = \overset{m}{1,4} \\ Y = -1,6 \\ Z = 8,0. \end{array}\right.$$

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Nous avons à mettre en perspective les hélices, dont le nombre de spires est indéfini, et les courbes qui terminent, sur les côtés, la surface visible du filet. Les hélices seront déterminées par les points A, B, C, ..., $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., dont les projections divisent les cercles en douzièmes de la circonférence, et nous négligerons ceux qui sont invisibles ou inutiles pour la construction. Nous prenons sur l'épure les ordonnées X et Z, comme dans les problèmes précédents, et nous formons les valeurs des Y, en observant que les hauteurs verticales croissent consécutivement de $0^m,15$,

Digitized by Google

douzième de la hauteur spirale. D'ailleurs, pour les points A et $\alpha$, nous avons $Y = -1^m,6$ et $Y = -0^m,7$.

Quant aux lignes latérales du contour apparent, nous les obtiendrons comme les enveloppes perspectives des droites représentant les positions de la génératrice, ou des côtés du triangle générateur, et déterminées par les mêmes points.

Nous ajouterons à ces éléments les verticales qui limitent les hélices sur le tableau : elles passent par les points $\psi$ et $\theta$, $\chi$ et $\zeta$, qui seraient latéraux sur les projections des hélices.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B | X = 2,400 m<br>Z = 6,268 | C | X = 3,132<br>Z = 7,000 | $\beta$ | X = 1,900<br>Z = 7,134 |
| $\gamma$ | X = 2,266<br>Z = 7,500 | $\psi$ | X = — 0,594<br>Z = 7,849 | $\theta$ | X = 3,224<br>Z = 7,181 |
| $\chi$ | X = 0,402<br>Z = 8,049 | $\zeta$ | X = 2,357<br>Z = 7,708. | | |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\psi$ | $x = -151$ mm | $\theta$ | $x = 898$ | $\chi$ | $x = 100$ |
| $\zeta$ | $x = 612$ | $i$ | $x = 350$ | $a$ | $x = 467$<br>$y = -533$ |
| $b$ | $x = 766$<br>$y = -462$ | $c$ | $x = 895$<br>$y = -371$ | $d$ | $x = 850$<br>$y = -287$ |
| $n$ | $x = -74$<br>$y = -89$ | $o$ | $x = -150$<br>$y = -62$ | $p$ | $x = -95$<br>$y = -28$ |
| $r$ | $x = 127$<br>$y = 16$ | $\alpha$ | $x = 400$<br>$y = -200$ | $\beta$ | $x = 532$<br>$y = -154$ |
| $\gamma$ | $x = 604$<br>$y = -106$ | $\delta$ | $x = 600$<br>$y = -62$ | $\nu$ | $x = 125$<br>$y = 117$ |

Digitized by Google

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\omega \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$ | 100<br>162 | $\pi \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$ | 142<br>216 | $\rho \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$ | 252<br>266 |
| $aa' =$ | 600 | $cc' =$ | 514 | $nn' =$ | 400 |
| $bb' =$ | 573 | $dd' =$ | 449 | $\alpha\alpha' =$ | 514 |
| $\beta\beta' =$ | 504 | $\delta\delta' =$ | 449 | $\nu\nu' =$ | 424. |
| $\gamma\gamma' =$ | 479 | | | | |

Ayant construit les deux premières spires des hélices, dans leurs parties visibles, nous les prolongeons tant en haut qu'en bas, en portant les verticales $aa'$, $bb'$,..., $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$,... à la suite d'elles-mêmes, selon le nombre de spires dont nous voulons que les courbes soient composées. Les verticales $\psi\psi'$, $\theta\theta'$, $\chi\chi'$, $\zeta\zeta'$, menées aux distances marquées par leurs ordonnées $x$, servent à les limiter dans le sens horizontal. Les prolongements des arêtes $a\alpha$, $b\beta$,... devront intercepter des parties égales sur la verticale $ii'$, déterminée de la même manière.

Nous traçons les branches latérales de contour apparent, en les faisant toucher les arêtes qui se croisent dans ces parties et se raccorder avec les hélices. C'est ainsi que l'une d'elles, vers la gauche, touche les arêtes $o\omega$, $p\pi$, et se rattache aux courbes $nopr$, $\nu\omega\pi\rho$. Une autre, à droite, touche $d\delta$ avec laquelle elle se confond sensiblement. Cette arête ne croise aucune de ses voisines, mais il est évident qu'un croisement aurait lieu, sous des directions très-obliques, si les arêtes étaient suffisamment rapprochées. Au reste, ces lignes de contour apparent ont très-peu de courbure, et il serait permis dans la pratique de les considérer comme droites.

UNE AUTRE VIS DE MÊME ESPÈCE. (*Fig.* 125.)

185. *Cette vis, qui est encore à filet triangulaire, a son axe horizontal et déclinant de* 45 *degrés, de tels sens qu'il s'éloigne de droite à gauche. Les hélices se pro-*

Digitized by Google

*jettent, sur un plan perpendiculaire à l'axe, suivant les cercles* $AB_1C_1\ldots$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$, *des rayons* $1^m,8$ *et* 1 *mètre, et concentriques en* I. *La grande hélice passe par le point* A, *le plus élevé de sa projection. La hauteur spirale est* $2^m,4$, *et le sens des spires tel, que le point* B *est à gauche du plan de projections :*

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l} X = \phantom{-}3^m, \\ Y = -3, \\ Z = \phantom{-}15. \end{array}\right.$$

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Supposant, comme précédemment, les projections divisées en 12 parties égales, nous déterminons les points correspondants des hélices, A, B, C,..., $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,.... A cet effet, nous construisons les projections horizontales $A_2$, $B_2$, $C_2$,... des points de la première; on remarquera que celle du point A est sur la ligne de terre, et prenant, perpendiculairement à cette ligne, les parties $B_3B_2$, $C_3C_2$,... égales successivement à un douzième, à deux douzièmes,... de la hauteur spirale, c'est-à-dire égales à $0^m,2$, à $0^m,4$,.... Ces projections déterminent les ordonnées X et Z; les ordonnées Y sont les valeurs $B_1B_3$, $C_1C_3$,... si le plan d'horizon est pris pour géométral, et se déduisent, dans tous les cas, de ces valeurs. Une opération semblable s'applique à la petite hélice, mais le point qui se projette verticalement en $\alpha_1$ et dont on peut faire l'origine de cette courbe, se projette horizontalement en $L_2$, les projections horizontales de A et $\alpha$ devant être distantes d'une demi-hauteur spirale. Les points qui ne peuvent contribuer à la détermination des parties visibles seront négligés.

Les hélices prennent, en perspective, une grande courbure entre F et L, et leurs analogues. Nous ajouterons, en conséquence, aux précédents, les deux points S et $\sigma$ dont

Digitized by Google

les projections verticales divisent les arcs FL, φλ en parties égales.

Nous ne rechercherons pas les points latéraux ou culminants des hélices. En ce qui concerne ces points sur les lignes à double courbure, de position quelconque, je renvoie au n° 186. Nous pourrions du moins construire, pour chaque hélice, deux droites qui auraient la propriété d'être tangentes à toutes les spires. Ce seraient les arêtes de contour apparent des cylindres qui auraient pour bases les deux cercles donnés, et pour axe commun celui des hélices, parce qu'on peut considérer les courbes comme tracées à la surface de ces deux cylindres. Ces droites, sur le tableau, concourraient au point de distance.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | X = | 3,000 m | B | X = | 2,222 |
| | Y = | — 1,200 | | Y = | — 1,441 |
| | Z = | 15,000 | | Z = | 14,505 |
| C | X = | 1,615 | D | X = | 1,303 |
| | Y = | — 2,100 | | Y = | — 3,000 |
| | Z = | 14,181 | | Z = | 14,151 |
| E | X = | 1,332 | F | X = | 1,557 |
| | Y = | — 3,900 | | Y = | — 4,559 |
| | Z = | 14,464 | | Z = | 15,071 |
| S | X = | 1,993 | L | X = | 2,152 |
| | Y = | — 4,739 | | Y = | — 4,800 |
| | Z = | 15,448 | | Z = | 15,848 |
| R | X = | 2,717 | A′ | X = | 1,303 |
| | Y = | — 1,441 | | Y = | — 1,200 |
| | Z = | 17,828 | | Z = | 16,697 |
| α | X = | 2,152 | β | X = | 1,657 |
| | Y = | — 2,000 | | Y = | — 2,134 |
| | Z = | 15,848 | | Z = | 15,636 |

Digitized by Google

$$\gamma \begin{cases} X = & 1,255 \\ Y = - & 2,500 \\ Z = & 15,521 \end{cases} \qquad \delta \begin{cases} X = & 1,020 \\ Y = - & 3,000 \\ Z = & 15,566 \end{cases}$$

$$\varepsilon \begin{cases} X = & 0,974 \\ Y = - & 3,500 \\ Z = & 15,802 \end{cases} \qquad \varphi \begin{cases} X = & 1,091 \\ Y = - & 3,866 \\ Z = & 16,202 \end{cases}$$

$$\sigma \begin{cases} X = & 1,190 \\ Y = - & 3,966 \\ Z = & 16,443 \end{cases} \qquad \lambda \begin{cases} X = & 1,303 \\ Y = - & 4,000 \\ Z = & 16,697 \end{cases}$$

$$\rho \begin{cases} X = & 1,303 \\ Y = - & 2,134 \\ Z = & 18,111. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | mm | | | | | | |
| $a$ | $x =$ | 400 | $b$ | $x =$ | 306 | $c$ | $x =$ | 228 |
| | $y =$ | $-160$ | | $y =$ | $-192$ | | $y =$ | $-296$ |
| $d$ | $x =$ | 184 | $e$ | $x =$ | 178 | $f$ | $x =$ | 207 |
| | $y =$ | $-424$ | | $y =$ | $-539$ | | $y =$ | $-605$ |
| $s$ | $x =$ | 258 | $l$ | $x =$ | 272 | $r$ | $x =$ | 305 |
| | $y =$ | $-614$ | | $y =$ | $-606$ | | $y =$ | $-162$ |
| $a'$ | $x =$ | 156 | $b'$ | $x =$ | 66 | $c'$ | $x =$ | $-10$ |
| | $y =$ | $-144$ | | $y =$ | $-178$ | | $y =$ | $-264$ |
| $d'$ | $x =$ | $-50$ | $e'$ | $x =$ | $-45$ | $f'$ | $x =$ | $-17$ |
| | $y =$ | $-378$ | | $y =$ | $-482$ | | $y =$ | $-544$ |
| $s'$ | $x =$ | 35 | $l'$ | $x =$ | 52 | $r'$ | $x =$ | 105 |
| | $y =$ | $-553$ | | $y =$ | $-547$ | | $y =$ | $-148$ |
| $\alpha$ | $x =$ | 272 | $\beta$ | $x =$ | 212 | $\gamma$ | $x =$ | 163 |
| | $y =$ | $-253$ | | $y =$ | $-273$ | | $y =$ | $-322$ |
| $\delta$ | $x =$ | 131 | $\varepsilon$ | $x =$ | 123 | $\varphi$ | $x =$ | 135 |
| | $y =$ | $-385$ | | $y =$ | $-443$ | | $y =$ | $-477$ |
| $\sigma$ | $x =$ | 145 | $\lambda$ | $x =$ | 156 | $\rho$ | $x =$ | 144 |
| | $y =$ | $-483$ | | $y =$ | $-485$ | | $y =$ | $-236$ |



Digitized by Google

$$\alpha' \begin{cases} x = 52 \\ y = -228 \end{cases} \quad \beta' \begin{cases} x = -5 \\ y = -246 \end{cases} \quad \gamma' \begin{cases} x = -51 \\ y = -290 \end{cases}$$

$$\delta' \begin{cases} x = -78 \\ y = -348 \end{cases} \quad \varepsilon' \begin{cases} x = -83 \\ y = -400 \end{cases} \quad \varphi' \begin{cases} x = -69 \\ y = -432 \end{cases}$$

$$\sigma' \begin{cases} x = -56 \\ y = -437 \end{cases} \quad \lambda' \begin{cases} x = -43 \\ y = -435 \end{cases} \quad \rho' \begin{cases} x = -40 \\ y = -215. \end{cases}$$

Ces points construits sur la toile nous permettent de tracer les deux premières spires de chaque hélice, dans leurs portions visibles. Pour en conclure les suivantes, nous appliquons le procédé des divisions perspectives du n° **111**, parce qu'il sert à prolonger une droite d'un nombre quelconque de parties égales à elle-même dans l'espace, aussi bien qu'à opérer sa propre division. Nous obtenons par exemple deux points $d''$ et $d_1$, sur le prolongement de $dd'$, d'après la condition que $d''d'$, $d'd$, $dd_1$, représentent des parties égales. A cet effet, nous menons par le point $d$ l'horizontale $ojdl$, sur laquelle nous prenons arbitrairement trois longueurs égales, $ld$, $dj$, $jo$; nous tirons $jd't$, qui rencontre $x'x$ en un point $t$; puis $to$, $tl$, dans les rencontres $d''$, $d_1$, avec les prolongements de $dd'$, sont les points demandés.

Enfin, nous achevons la perspective en figurant les lignes de contour latérales comme celles du problème précédent.

## § VII.

### MISE EN PERSPECTIVE DES COURBES A DOUBLE COURBURE.

186. Quand une courbe à double courbure est telle, qu'on peut assigner la loi de sa génération en la considérant comme résultant du mouvement d'un point dans l'espace, on détermine d'après cette loi la position d'un certain nombre de ses points, que l'on met subséquemment

Digitized by Google

en perspective, pour en faire dépendre la représentation de la courbe tout entière. C'est ainsi, en particulier, que nous avons opéré à l'égard des hélices qui se sont rencontrées dans quelques problèmes sur les surfaces gauches. Mais, presque toujours, les courbes de cette nature résultent de la pénétration mutuelle de deux surfaces courbes données de position : dans ce cas, nous obtiendrons leurs points principaux en coupant les surfaces par une suite de plans convenablement choisis, et construisant les rencontres des intersections contenues dans ces plans, conformément aux procédés de la géométrie descriptive.

187. De quelque manière qu'une ligne à double courbure soit donnée, il serait avantageux de pouvoir déterminer préalablement, et sans incertitude, les points latéraux ou culminants de sa perspective, comme nous savons le faire pour les courbes planes. En général, la théorie ne nous en fournit pas le moyen, et voici seulement ce qu'elle indique. Si l'on conçoit des tangentes à la courbe en tous ses points, c'est-à-dire les droites formées par les prolongements de tous ses éléments suivant leurs propres directions, il peut arriver qu'une ou plusieurs de ces droites rencontrent l'axe des X : celles-ci devenant horizontales en perspective, leurs contacts sont des points culminants. Ce seront des points latéraux, si c'est l'axe des Y qui est rencontré par les tangentes. D'ailleurs, toutes les tangentes à une courbe à double courbure composent une surface réglée développable, dont la courbe elle-même est appelée la *caractéristique*, et la question peut se réduire à trouver les points de rencontre de cette surface avec les axes des X et des Y. Dans les cas les plus généraux, l'opération ne donnerait les tangentes qui rencontrent les axes que par des méthodes de tâtonnement, en même temps qu'elle serait



Digitized by Google

fort laborieuse, et dès lors elle manquerait le but proposé.

Dans le cas particulier où la courbe est une hélice ayant son axe vertical, la surface composée par les tangentes est un *héliçoïde développable;* les points de rencontre avec l'axe des Y sont situés dans les plans menés par le point de vue tangentiellement au cylindre sur lequel l'hélice est décrite, et les points latéraux sont en conséquence déterminés par ces plans.

Nous passons immédiatement à quelques exemples numériques.

INTERSECTION DE DEUX CYLINDRES HORIZONTAUX. (*Fig.* 126.)

188. *Deux cylindres droits, à bases circulaires, ont leurs arêtes horizontales : le rayon du premier égale* $0^m,3$, *sa longueur* 4 *mètres, et sa déclinaison* $= 12 : 5$, *de sens tel qu'il s'éloigne de droite à gauche. Le rayon du second est* $0^m,5$, *sa longueur* 5 *mètres, sa déclinaison* $= 4 : 3$, *dans un sens qui l'éloigne de gauche à droite.*

I *et* J *étant respectivement les centres des bases visibles, on donne :*

$$I \begin{cases} X = 3^m, \\ Y = -2,9 \\ Z = 15, \end{cases} \qquad J \begin{cases} X = 1^m, \\ Y = -3, \\ Z = 14. \end{cases}$$

*La distance centrale* $=$ 3 *mètres.*

Il est facile de reconnaître, par les données de cet énoncé, que le premier cylindre pénètre totalement le second, et qu'une seule branche de la courbe de pénétration est visible. Pour la construire, nous déterminons d'abord ses deux limites $\alpha$, $\beta$, c'est-à-dire les points où les arêtes de contour apparent du premier cylindre rencontrent le second. Nous supposerons ensuite les surfaces coupées par

Digitized by Google

cinq plans horizontaux (254), aux intervalles de 1 décimètre, l'un d'eux passant par l'axe du cylindre pénétrant, les deux autres disposés symétriquement au-dessus et au-dessous. En outre, comme la courbe de pénétration prend plus de courbure dans sa partie supérieure, nous ajouterons aux précédents un plan situé à $0^m,25$ au-dessus de l'axe.

Les lettres K, A, B, C, D, E désignent, dans l'ordre des hauteurs verticales, les points de la courbe déterminés par ces divers plans. Pour construire les circonférences des bases, nous emploierons les extrémités des arêtes de contour, et de quelques-unes de celles qui passent par les points ci-dessus : ces droites sont nommées $\alpha'\alpha\alpha''$, $6'66''$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, A'AA'', etc. Les diamètres horizontaux aboutissent en C', C'', C''', Q, Q', Q''.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha'$ | X = | 3,080 m | $6'$ | X = | 2,902 |
| | Y = | — 2,613 | | Y = | — 3,181 |
| | Z = | 15,033 | | Z = | 14,959 |
| $\gamma$ | X = | 0,876 | $\delta$ | X = | 1,170 |
| | Y = | — 2,525 | | Y = | — 3,453 |
| | Z = | 14,093 | | Z = | 13,873 |
| $\alpha''$ | X = | 1,542 | $\gamma'$ | X = | 3,876 |
| | Z = | 18,726 | | Z = | 18,093 |
| $\alpha$ | X = | 2,762 | $6$ | X = | 2,688 |
| | Z = | 15,822 | | Z = | 15,477 |
| K | X = | 2,597 | A | X = | 2,576 |
| | Z = | 15,535 | | Z = | 15,435 |
| B | X = | 2,561 | C | X = | 2,564 |
| | Z = | 15,318 | | Z = | 15,269 |
| D | X = | 2,580 | E | X = | 2,616 |
| | Z = | 15,273 | | Z = | 15,369 |

Digitized by Google

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A′ | X = | 2,794 | C′ | X = | 2,723 |
| | Z = | 14,914 | | Z = | 14,885 |
| M | X = | 1,320 | Q | X = | 1,400 |
| | Z = | 13,760 | | Z = | 13,700. |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha'$ | $x =$ | 615 mm | $\beta'$ | $x =$ | 581 | $\alpha''$ | $x =$ | 247 |
| | $y =$ | −522 | | $y =$ | −639 | | $y =$ | −419 |
| $\beta''$ | $x =$ | 219 | $\gamma$ | $x =$ | 186 | $\delta$ | $x =$ | 253 |
| | $y =$ | −512 | | $y =$ | −537 | | $y =$ | −747 |
| $\gamma'$ | $x =$ | 643 | $\delta'$ | $x =$ | 700 | $\alpha$ | $x =$ | 524 |
| | $y =$ | −419 | | $y =$ | −580 | | $y =$ | −496 |
| $\beta$ | $x =$ | 521 | $k$ | $x =$ | 500 | $a$ | $x =$ | 501 |
| | $y =$ | −617 | | $y =$ | −512 | | $y =$ | −525 |
| $b$ | $x =$ | 502 | $c$ | $x =$ | 504 | $d$ | $x =$ | 507 |
| | $y =$ | −548 | | $y =$ | −570 | | $y =$ | −589 |
| $e$ | $x =$ | 511 | $a'$ | $x =$ | 562 | $c'$ | $x =$ | 549 |
| | $y =$ | −605 | | $y =$ | −543 | | $y =$ | −585 |
| $m$ | $x =$ | 288 | $q$ | $x =$ | 307 | $a''$ | $x =$ | 202 |
| | $y =$ | −589 | | $y =$ | −657 | | $y =$ | −436 |
| $c''$ | $x =$ | 190 | $m'$ | $x =$ | 730 | $q'$ | $x =$ | 746 |
| | $y =$ | −468 | | $y =$ | −456 | | $y =$ | −508. |

Ayant construit ces points et ceux qui peuvent s'en conclure sur les circonférences des bases, nous traçons la perspective demandée. La courbe $\alpha kabcde\beta$ doit s'infléchir vers ses extrémités, de manière à se raccorder avec les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, puisqu'elle serait comprise tangentiellement entre ces droites, si elle était achevée dans sa partie invisible. Tous les points en ligne droite, dans l'espace, devront l'être pareillement sur le tableau.

Nous aurions pu construire toutes les arêtes déterminées

Digitized by Google

dans l'espace par les plans sécants, et obtenir les points $a$, $b$, $c$,... par les rencontres respectives de ces droites. De cette manière, nous eussions été dispensés de déterminer les points de la courbe de pénétration dans l'opération géométrale. Mais le mode que nous avons suivi donne cette courbe avec plus d'exactitude.

UN CONE VERTICAL PÉNÉTRÉ PAR UN CYLINDRE HORIZONTAL.

(*Fig.* 127.)

189. *La hauteur du cône égale* 2 *mètres, et le rayon de sa base* $0^m,6$; *on donne pour le centre de cette base:*

$$I \begin{cases} X = -1^m, \\ Y = -2, \\ Z = 8. \end{cases}$$

*Le rayon du cylindre est* $0^m,3$, *et sa longueur* $1^m,6$. *L'axe du cylindre rencontre l'axe du cône et se trouve divisé par celui-ci en parties égales; il est situé à* $0^m,6$ *au-dessus de la base du cône, et il décline de* 45 *degrés, s'éloignant de gauche à droite.*

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Une branche de la courbe de pénétration est seule visible, et nous appliquons à sa détermination un système de sept plans horizontaux séparés par des intervalles de $0^m,08$; l'un d'eux contenant l'axe du cylindre, et les autres disposés symétriquement. Les sections seront des cercles et des droites, dont nous obtiendrons de la manière la plus simple les rencontres respectives, en employant dans la construction géométrale un plan vertical de projections perpendiculaire aux arêtes du cylindre. Nous ajouterons à ces points les limites de la courbe $\alpha$ et 6, sur les arêtes de contour $\alpha'\alpha\alpha''$, $6'66''$. Les lettres A, B, C,... les désigneront dans l'ordre vertical, et nous emploierons, du reste,

Digitized by Google

une notation analogue à celle du problème précédent. Les points D′, D″, D‴ sont les extrémités des diamètres horizontaux des bases du cylindre, P l'extrémité du diamètre de la base du cône qui est perpendiculaire au tableau, Sγ, Sδ les arêtes de contour du cône.

*Résultat géométral.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| α′ | X = — 1,602 m<br>Y = — 1,104<br>Z = 7,470 | β′ | X = — 1,511<br>Y = — 1,690<br>Z = 7,379 |
| α″ | X = — 0,470<br>Y = — 1,104<br>Z = 8,602 | α | X = — 1,267<br>Y = — 1,104<br>Z = 7,804 |
| β | X = — 1,309<br>Y = — 1,690<br>Z = 7,591 | A | X = — 1,103<br>Z = 7,662 |
| B | X = — 1,013<br>Z = 7,628 | C | X = — 0,987<br>Z = 7,604 |
| D | X = — 0,996<br>Z = 7,580 | E | X = — 1,034<br>Z = 7,557 |
| F | X = — 1,099<br>Z = 7,541 | A′ | X = — 1,437<br>Z = 7,307 |
| D′ | X = — 1,354<br>Z = 7,222 | γ | X = — 1,595<br>Z = 7,926 |
| δ | X = — 0,405<br>Z = 8,074. | | |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| α′ | x = — 429 mm<br>y = — 296 | β′ | x = — 409<br>y = — 458 | α″ | x = — 109<br>y = — 257 |
| β″ | x = — 89<br>y = — 397 | α | x = — 325<br>y = — 283 | β | x = — 345<br>y = — 445 |

Digitized by Google

$$a \begin{cases} x = -288 \\ y = -303 \end{cases} \quad b \begin{cases} x = -266 \\ y = -325 \end{cases} \quad c \begin{cases} x = -259 \\ y = -347 \end{cases}$$

$$d \begin{cases} x = -263 \\ y = -369 \end{cases} \quad e \begin{cases} x = -274 \\ y = -392 \end{cases} \quad f \begin{cases} x = -291 \\ y = -414 \end{cases}$$

$$a' \begin{cases} x = -395 \\ y = -317 \end{cases} \quad d' \begin{cases} x = -375 \\ y = -388 \end{cases} \quad a'' \begin{cases} x = -73 \\ y = -275 \end{cases}$$

$$d'' \begin{cases} x = -53 \\ y = -335 \end{cases} \quad \gamma \begin{cases} x = -403 \\ y = -505 \end{cases} \quad \delta \begin{cases} x = -100 \\ y = -495 \end{cases}$$

$$s \begin{cases} x = -250 \\ y = 000 \end{cases} \quad p \begin{cases} x = -270 \\ y = -541. \end{cases}$$

La construction de la perspective est immédiate et ne donne lieu à aucune observation qui n'ait été déjà faite.

### INTERSECTION D'UN CÔNE ET D'UN CYLINDRE VERTICAUX.

(*Fig.* 128.)

**190.** *Le rayon de la base du cône égale* 2 *mètres, et celui du cylindre* $0^m,5$. *Les deux surfaces ont leurs axes verticaux et même hauteur égale à* 8 *mètres. Leurs bases sont dans un même plan situé à* 4 *mètres au-dessous du plan d'horizon; on a pour les centres de ces deux cercles :*

$$I \begin{cases} X = 1^m,4, \\ Z = 12, \end{cases} \quad J \begin{cases} X = 2^m, \\ Z = 11. \end{cases}$$

*La distance centrale* $= 1^m,8$.

Nous pourrions encore appliquer à la recherche de la courbe de pénétration des surfaces proposées une série de plans sécants horizontaux. Les sections seraient des cercles d'une construction très-facile; mais les limites $\gamma$, $\delta$ de cette courbe resteraient incertaines ou s'obtiendraient par une opération différente. Nous préférons, en conséquence, faire usage d'un système de plans verticaux, se croisant par l'axe du cône. Les sections dans les deux surfaces seront des

Digitized by Google

droites, dont nous déterminerons les intersections respectives par leurs rabattements sur le plan des bases, considéré comme géométral. En général, chaque plan d'un tel système coupe le cylindre suivant deux arêtes, et fournit deux points de la courbe demandée; mais nous ne conserverons que les points qui doivent être visibles.

Cela posé, nous prendrons seulement cinq plans sécants : deux passeront par les arêtes de contour apparent $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ du cylindre; un troisième sera tangent à la même surface et donnera le point A; un quatrième divisera en parties égales le rayon perpendiculaire au plan précédent et déterminera le point B; enfin le cinquième passera par l'axe du cylindre, d'où résultera le point C. D'ailleurs, le premier de ces plans, celui qui passe par $\gamma\gamma'$, fournit deux points de la ligne de pénétration, $\gamma$ et $\gamma_1$.

Les arêtes de contour du cône sont représentés par $S\alpha$, $S\beta$.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | X = | — 0,599 m | $\beta$ | X = | 3,360 |
| | Y = | — 4,000 | | Y = | — 4,000 |
| | Z = | 12,066 | | Z = | 11,605 |
| $\gamma$ | X = | 1,505 | $\gamma'$ | X = | 1,532 |
| | Y = | 0,246 | | Y = | — 0,732 |
| | Z = | 11,067 | | Z = | 10,824 |
| $\delta$ | X = | 2,487 | A | X = | 1,502 |
| | Y = | — 2,225 | | Y = | — 0,215 |
| | Z = | 10,887 | | Z = | 10,951 |
| B | X = | 1,912 | C | X = | 2,227 |
| | Y = | — 2,310 | | Y = | — 2,430 |
| | Z = | 10,508 | | Z = | 10,622. |

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $x = -89^{mm}$, $y = -597$ | $\beta$ | $x = 521$, $y = -621$ | $s$ | $x = 210$, $y = 600$ |
| $p$ | $x = 252$, $y = 720$ | $\gamma$ | $x = 244$, $y = 40$ | $\gamma_1$ | $x = 255$, $y = -122$ |
| $\delta$ | $x = 414$, $y = -368$ | $a$ | $x = 247$, $y = -35$ | $b$ | $x = 327$, $y = -396$ |
| $c$ | $x = 377$, $y = -412$ | | $\gamma\gamma' = 327$, $\delta\delta' = 1030$ | | $bb' = 1081$, $cc' = 1090$. |

La construction de la perspective est immédiate. Le point C est le plus bas de la courbe dans l'espace, sans être précisément un point culminant sur le tableau; mais $\gamma$ et $\delta$ sont des points latéraux.

UN HÉMISPHÈRE PÉNÉTRÉ PAR UN CÔNE ET UN CYLINDRE.

(*Fig.* 129.)

**191.** *Un hémisphère est pénétré par un cône et un cylindre dont les axes sont verticaux. La hauteur du cône égale* 15 *mètres, et celle du cylindre* 10 *mètres. Les bases des trois surfaces sont dans un même plan situé à* 2 *mètres au-dessous du plan d'horizon, et leurs centres ont d'ailleurs ces positions :*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $X = 7^{m}$, $Z = 60$, | J | $X = 2,7$, $Z = 55,7$, | K | $X = 11,3$, $Z = 55,7$. |

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Il est clair que les deux courbes de pénétration se déterminent de la manière la plus simple par deux séries de plans sécants horizontaux. Chaque plan coupe la sphère suivant un cercle, le cône ou le cylindre suivant un autre cercle; et, si les deux cercles se coupent, leurs rencontres

Digitized by Google

appartiennent à l'une ou l'autre de ces courbes. Rien n'est plus simple que l'exécution de cette conception à l'aide d'un plan vertical de projections, de position quelconque. Mais, pour éviter les essais inutiles, voici la marche à suivre.

Considérons le cône. Nous déterminons d'abord ses arêtes de contour $S\alpha$, $S\beta$, et par deux rabattements les points $\alpha$, $\beta$ où elles rencontrent la sphère. Ces points limitent la portion visible de la courbe de pénétration. Un plan vertical conçu par le centre de la sphère et l'axe du cône coupe le cône suivant une arête dont la rencontre V avec la sphère est, dans l'espace, le point le plus bas de cette courbe : nous déterminons ce point. Un plan sécant horizontal ne pourra donc convenir à la construction qu'autant qu'il sera plus élevé que V et moins élevé que $\beta$. Dans ces conditions, il contiendra deux points de la courbe, situés symétriquement par rapport au plan vertical que nous avons fait passer par V. Mais si le plan est plus élevé que $\alpha$, un seul de ces deux points est visible et doit être conservé.

En conséquence, d'après les résultats qui auront été obtenus pour $\alpha$, $\beta$, V, nous ferons passer les plans sécants à des hauteurs de $1^m,5$, $2^m,0$, $3^m,2$, $3^m,8$ et $4^m,6$ au-dessus du plan d'horizon, en désignant respectivement par A et $A_1$, B et $B_1$, C, D, E les points qui en résulteront.

La même marche suivie à l'égard du cylindre nous conduit à couper cette surface par des plans ayant les hauteurs $1^m,3$, $2^m,3$, $3^m,0$, $4^m,0$, $5^m,0$ et $5^m,5$ au-dessus du plan d'horizon, d'où résultent les points G, $G_1$, H, M, N, P, Q. Nous désignons par $\gamma$ et $\delta$ les limites de la courbe, et par W son point le plus bas dans l'espace.

Relativement au contour apparent de l'hémisphère, nous observons que les points latéraux de sa base, $\varphi$ et $\psi$, sont aussi les points latéraux de ce contour, puisqu'il doit y avoir un raccord en chacun de ces points. Ils s'obtiendront d'après la méthode connue, ainsi que le point culminant $\varepsilon$.

Digitized by Google

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| ε | X = | 7,00 | φ | X = | — 1,99 |
| | Y = | 6,94 | | Y = | — 2,00 |
| | Z = | 58,95 | | Z = | 59,70 |
| ψ | X = | 15,86 | α | X = | 0,64 |
| | Y = | — 2,00 | | Y = | 2,70 |
| | Z = | 57,64 | | Z = | 55,70 |
| $\alpha_1$ | X = | 2,70 | β | X = | 4,23 |
| | Y = | 2,70 | | Y = | 5,32 |
| | Z = | 53,64 | | Z = | 55,56 |
| V | X = | 1,01 | γ | X = | 8,93 |
| | Y = | 1,03 | | Y = | 5,87 |
| | Z = | 54,01 | | Z = | 56,08 |
| δ | X = | 13,63 | W | X = | 13,00 |
| | Y = | 1,64 | | Y = | 1,01 |
| | Z = | 55,12 | | Z = | 54,00 |
| A | X = | 0,64 | $A_1$ | X = | 1,68 |
| | Z = | 54,68 | | Z = | 53,64 |
| B | X = | 0,57 | $B_1$ | X = | 2,13 |
| | Z = | 55,13 | | Z = | 53,57 |
| C | X = | 3,09 | D | X = | 3,53 |
| | Z = | 53,78 | | Z = | 54,06 |
| E | X = | 3,91 | G | X = | 13,48 |
| | Z = | 54,48 | | Z = | 54,70 |
| $G_1$ | X = | 12,30 | $\delta_1$ | X = | 11,88 |
| | Z = | 53,52 | | Z = | 53,37 |
| H | X = | 11,20 | M | X = | 10,56 |
| | Z = | 53,30 | | Z = | 53,42 |
| N | X = | 9,47 | P | X = | 9,10 |
| | Z = | 53,88 | | Z = | 55,48 |
| Q | X = | 8,98 | | | |
| | Z = | 55,41. | | | |

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | mm | | | | |
| $\varepsilon$ | $x = 237$ | $\varphi$ | $x = -67$ | $\psi$ | $x = 550$ |
| | $y = 235$ | | $y = -67$ | | $y = -69$ |
| $s$ | $x = 97$ | $\alpha$ | $x = 23$ | $\beta$ | $x = 152$ |
| | $y = 467$ | | $y = 97$ | | $y = 192$ |
| $v$ | $x = 37$ | $a$ | $x = 23$ | $a_1$ | $x = 63$ |
| | $y = 38$ | | $y = 55$ | | $y = 56$ |
| $b$ | $x = 21$ | $b_1$ | $x = 79$ | $\alpha_1$ | $x = 101$ |
| | $y = 73$ | | $y = 75$ | | $y = 101$ |
| $c$ | $x = 115$ | $d$ | $x = 131$ | $e$ | $x = 143$ |
| | $y = 119$ | | $y = 141$ | | $y = 161$ |
| $\gamma$ | $x = 321$ | $\delta$ | $x = 495$ | $\omega$ | $x = 481$ |
| | $y = 209$ | | $y = 60$ | | $y = 37$ |
| $g$ | $x = 493$ | $g_1$ | $x = 460$ | $\delta_1$ | $x = 445$ |
| | $y = 48$ | | $y = 48$ | | $y = 62$ |
| $h$ | $x = 420$ | $m$ | $x = 395$ | $n$ | $x = 362$ |
| | $y = 86$ | | $y = 112$ | | $y = 149$ |
| $p$ | $x = 337$ | $q$ | $x = 322$ | | $\gamma\gamma' = 76$ |
| | $y = 180$ | | $y = 198$ | | $\delta\delta' = 231$ |
| | $hh' = 214$ | $r$ | $x = 276$ | | |
| | $nn' = 149$ | | $y = -78.$ | | |

Les courbes d'intersection, construites par ces valeurs, doivent se raccorder avec les arêtes de contour du cône ou du cylindre, et se trouvent déterminées avec beaucoup de précision. Si les points latéraux $\varphi$, $\psi$ avec les culminants $\varepsilon$, $r$, ne suffisaient pas pour la perspective de l'hémisphère et de sa base, on en déterminerait facilement d'autres points.

Nous aurions pu nous servir des mêmes plans sécants pour les deux courbes, ce qui eût simplifié la construction géométrale; mais en employant deux systèmes distincts de

Digitized by Google

ces plans, on a l'avantage de les distribuer de la manière la plus convenable pour la position de chacune de ces lignes et la mieux appropriée aux diverses circonstances de leur courbure.

UNE PIÈCE D'ARTILLERIE. (*Fig.* 130.)

192. *L'axe de la pièce est horizontal; sa déclinaison* $=4:3$, *dans un sens tel qu'il s'éloigne de gauche à droite. Le corps du canon est un tronc de cône dont l'axe est long de* $2^m,3$, *les bases ayant* $0^m,350$ *et* $0^m,175$ *de rayon; le centre* I *de la grande base, qui est la plus rapprochée, est ainsi donné :*

$$I \begin{cases} X = & 2^m, \\ Y = - & 2, \\ Z = & 10. \end{cases}$$

*Les deux extrémités de la pièce sont des surfaces de révolution, de même axe que le cône : l'une d'elles est engendrée par les deux arcs de cercle* A'P *et* PRU; *le premier, de* 30 *degrés, ayant* 1 *mètre de rayon, se raccorde avec la génératrice du tronc de cône; le second, de* 60 *degrés, ayant* $0^m,1$ *de rayon, se raccorde avec le précédent en tournant sa concavité vers l'axe. A l'autre extrémité qui forme la culasse, l'arc générateur* LNM *de* 60 *degrés, ayant* $0^m,4$ *de rayon, est disposé de manière que* $MI = LW = 0^m,1$ : *cet arc se raccorde avec l'arc* LH *qui a son centre sur l'axe et engendre une surface sphérique : le centre et le rayon de la sphère sont en conséquence déterminés.*

*Les bras ou tourillons sont deux cylindres d'un rayon de* $0^m,075$, *et dont l'axe commun* $I_1I_2$ *est inférieur de* $0^m,15$ *à l'axe du canon : la distance de la même ligne au plan de la grande base du tronc du cône est* $0^m,8$, *et sa longueur totale est* $0^m,9$.

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Digitized by Google

Un seul des tourillons doit être visible, et la courbe suivant laquelle il tient au canon est l'intersection d'un cône avec un cylindre. La manière la plus simple de déterminer cette courbe consiste à couper les surfaces par une suite de plans perpendiculaires à l'axe du cône (n° 256). Les sections sont des cercles dans le cône, des droites dans le cylindre, et les rencontres respectives de ces lignes sont des points demandés, pourvu qu'ils soient visibles. On peut employer pour cette construction deux plans verticaux de projection, l'un perpendiculaire et l'autre parallèle aux arêtes du cylindre, ou bien un seul de ces plans, en effectuant des rabattements, ainsi que cela est expliqué dans le problème de géométrie descriptive du numéro précité. Le plan géométral est d'ailleurs un plan horizontal quelconque, par exemple celui qui contient l'axe du cône. Les arêtes de contour apparent du cylindre, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, étant supposées obtenues, nous choisissons les plans sécants qui passent par ces deux droites, un troisième passant par le point C de la circonférence extérieure, situé à $0^m,04$ au-dessus du diamètre horizontal B'B'', un quatrième par ce diamètre. Le plan passant par le point C contiendra deux arêtes et fournira deux points de la courbe demandée. Nous désignerons par $\gamma'$, $\delta'$, C', B', $C'_1$, les points de cette courbe ainsi déterminés.

Le corps du canon, la partie principale de l'objet proposé, nous offre l'occasion de revenir sur les méthodes relatives à diverses sortes de surfaces. A l'égard du tronc de cône, pour obtenir ses arêtes de contour apparent $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, nous déterminons d'abord le sommet du cône entier en prolongeant jusqu'à leur rencontre les droites qui limitent sa projection géométrale, et nous appliquons ensuite le procédé du n° 148, c'est-à-dire que nous tirons du sommet du cône au point de vue une droite dont nous construisons les rencontres avec les plans des deux bases du tronc, et de

Digitized by Google

ces points nous tirons des tangentes, ce qui s'exécute par des rabattements. Les deux cercles ponctués dans la figure représentent les rabattements de ces bases.

A la couronne du canon, son extrémité la plus éloignée, nous appliquons la méthode des enveloppes perspectives, en faisant, perpendiculairement à l'axe, les sections suivantes : QDQ′ par le milieu de l'arc donné AP; ensuite PEP′ par l'extrémité du même arc; RFR′ par le milieu R de l'arc PU. Nous y joindrons le cercle du diamètre UJU′, dont le plan détermine une solution de continuité dans la surface extérieure de cette extrémité.

Par continuation de la même méthode, nous emploierons à la culasse, les sections MIM′, NVN′, LWL′, dont la première est située dans la base du cône, et les deux autres par les points donnés, N et M. Nous déterminerons enfin les points culminants $\varepsilon$, $\varphi$, de la surface sphérique et son point latéral $\theta$.

Chaque section perpendiculaire à l'axe du canon sera mise en perspective au moyen de trois points seulement, savoir : les extrémités de son diamètre vertical, telles que D et D′, qui se projettent en D, et l'extrémité visible de son diamètre horizontal dans l'espace, telle que Q.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| $\alpha$ | X = | — 2,041 | $\beta$ | X = | — 1,899 |
| | Y = | — 1,654 | | Y = | — 2,326 |
| | Z = | 10,031 | | Z = | 9,924 |
| $\alpha'$ | X = | — 0,640 | A | X = | — 2,280 |
| | Y = | — 1,827 | | Y = | — 2,000 |
| | Z = | 11,855 | | Z = | 10,210 |
| D | X = | — 0,463 | Q | X = | — 0,311 |
| | Y = | — 1,811 | | Y = | — 2,000 |
| | Z = | 12,048 | | Z = | 11,934 |



Digitized by Google

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| E | X = | — 0,315 | P | X = | — 0,099 |
| | Y = | — 1,729 | | Y = | — 2,000 |
| | Z = | 12,247 | | Z = | 12,085 |
| F | X = | — 0,284 | R | X = | — 0,060 |
| | Y = | — 1,720 | | Y = | — 2,000 |
| | Z = | 12,288 | | Z = | 12,120 |
| J | X = | — 0,255 | U | X = | — 0,045 |
| | Y = | — 1,737 | | Y = | — 2,000 |
| | Z = | 12,327 | | Z = | 12,170 |
| M | X = | — 1,920 | V | X = | — 2,120 |
| | Y = | — 2,000 | | Y = | — 1,954 |
| | Z = | 9,940 | | Z = | 9,840 |
| N | X = | — 2,083 | W | X = | — 2,240 |
| | Y = | — 2,000 | | Y = | — 1,900 |
| | Z = | 9,812 | | Z = | 9,680 |
| L | X = | — 2,160 | ε | X = | — 2,275 |
| | Y = | — 2,000 | | Y = | — 1,887 |
| | Z = | 9,620 | | Z = | 9,656 |
| φ | X = | — 2,275 | θ | X = | — 2,387 |
| | Y = | — 2,113 | | Y = | — 2,000 |
| | Z = | 9,609 | | Z = | 9,606 |
| γ | X = | — 1,148 | δ | X = | — 1,173 |
| | Y = | — 2,078 | | Y = | — 2,222 |
| | Z = | 10,386 | | Z = | 10,353 |
| C | X = | — 1,198 | B | X = | — 1,205 |
| | Y = | — 2,110 | | Y = | — 2,150 |
| | Z = | 10,319 | | Z = | 10,310 |
| γ′ | X = | — 1,287 | δ′ | X = | — 1,382 |
| | Z = | 10,490 | | Z = | 10,510 |
| C′ | X = | — 1,340 | $C'_1$ | X = | — 1,379 |
| | Z = | 10,426 | | Z = | 10,455 |
| B′ | X = | — 1,362 | B″ | X = | — 1,115 |
| | Z = | 10,428 | | Z = | 10,430. |

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha$ $\begin{cases} x = -407^{mm} \\ y = -330 \end{cases}$ | $\beta$ $\begin{cases} x = -383 \\ y = -469 \end{cases}$ | $\alpha'$ $\begin{cases} x = -108 \\ y = -308 \end{cases}$ |
| $\beta'$ $\begin{cases} x = -97 \\ y = -367 \end{cases}$ | $a$ $\begin{cases} x = -355 \\ y = -409 \end{cases}$ | $a''$ $\begin{cases} x = -447 \\ y = -392 \end{cases}$ |
| $d$ $\begin{cases} x = -77 \\ y = -301 \end{cases}$ | $q$ $\begin{cases} x = -52 \\ y = -335 \end{cases}$ | $e$ $\begin{cases} x = -51 \\ y = -282 \end{cases}$ |
| $p$ $\begin{cases} x = -16 \\ y = -331 \end{cases}$ | $f$ $\begin{cases} x = -46 \\ y = -280 \end{cases}$ | $r$ $\begin{cases} x = -10 \\ y = -330 \end{cases}$ |
| $j$ $\begin{cases} x = -41 \\ y = -282 \end{cases}$ | $u$ $\begin{cases} x = -7 \\ y = -329 \end{cases}$ | $dd' = 63$ <br> $ee' = 89$ |
| $ff' = 91$ <br> $jj' = 85$ | $i$ $\begin{cases} x = -400 \\ y = -400 \end{cases}$ | $m$ $\begin{cases} x = -386 \\ y = -402 \end{cases}$ |
| $v$ $\begin{cases} x = -431 \\ y = -397 \end{cases}$ | $n$ $\begin{cases} x = -425 \\ y = -408 \end{cases}$ | $\omega$ $\begin{cases} x = -463 \\ y = -392 \end{cases}$ |
| $l$ $\begin{cases} x = -449 \\ y = -416 \end{cases}$ | $ii' = ii'' = 20$ <br> $vv' = 19$ $ww' = 41$ | |
| $\varepsilon$ $\begin{cases} x = -471 \\ y = -391 \end{cases}$ | $\varphi$ $\begin{cases} x = -473 \\ y = -440 \end{cases}$ | $\theta$ $\begin{cases} x = -497 \\ y = -416 \end{cases}$ |
| $\gamma$ $\begin{cases} x = -221 \\ y = -400 \end{cases}$ | $\delta$ $\begin{cases} x = -227 \\ y = -429 \end{cases}$ | $c$ $\begin{cases} x = -232 \\ y = -409 \end{cases}$ |
| $b$ $\begin{cases} x = -234 \\ y = -417 \end{cases}$ | $\gamma'$ $\begin{cases} x = -245 \\ y = -396 \end{cases}$ | $\delta'$ $\begin{cases} x = -263 \\ y = -423 \end{cases}$ |
| $c'$ $\begin{cases} x = -257 \\ y = -405 \end{cases}$ | $b'$ $\begin{cases} x = -261 \\ y = -412 \end{cases}$ | $c'_1$ $\begin{cases} x = -264 \\ y = -419 \end{cases}$ |
| $b''$ $\begin{cases} x = -214 \\ y = -412. \end{cases}$ | | |



Digitized by Google

Ces valeurs étant portées sur la toile, nous traçons sans difficulté la perspective demandée. La courbe de pénétration $\gamma' c' b' c'_1 \delta'$ doit se raccorder avec les droites $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$. Les branches de contour des surfaces de révolution doivent se raccorder entre elles ainsi qu'avec les arêtes du tronc de cône $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ ; une petite portion du contour, à l'extrémité la plus éloignée, est formée par l'ellipse $juj'$ elle-même, dans l'étendue où elle est visible.

Les ellipses qui représentent les sections perpendiculaires à l'axe de la pièce ont été déterminées avec un petit nombre d'éléments. Pour en mieux diriger le tracé, on considérera que les tangentes à ces courbes, menées par les extrémités des verticales $dd'$, $ee'$,... doivent concourir au point accidentel des diamètres horizontaux dans l'espace, la distance de ce point au centre perspectif étant égale aux $\frac{3}{4}$ de la distance centrale (110).

## APPLICATIONS PRATIQUES DE LA THÉORIE DES OMBRES ET DES IMAGES RÉFLÉCHIES.

### § Ier.

### MISE EN PERSPECTIVE DES OMBRES PROPRES ET DES OMBRES PORTÉES.

193. En général, ainsi que nous l'avons établi dans les éléments de la théorie, l'exposition d'un corps opaque aux rayons d'un corps lumineux engendre deux faits principaux : une ligne de séparation d'ombre et de lumière à la superficie du corps opaque, et l'ombre portée par cette ligne sur une surface donnée, c'est-à-dire le contour de l'ombre portée par ce corps dans toute son étendue. Ces effets sont simples, si le corps lumineux se réduit à un point ; dans le cas contraire, ils se compliquent de deux lignes de pénombre.

Digitized by Google

Mais l'hypothèse d'un point lumineux est la seule admise dans la pratique, parce que le foyer de lumière est le soleil, ou quelquefois la flamme d'une bougie, dont on peut, sans inconvénient, négliger la grandeur superficielle.

Nous simplifierons encore davantage, en nous renfermant dans le cas le plus ordinaire de cette hypothèse. Le soleil sera donc toujours le corps lumineux, et nos constructions supposeront cet astre réduit à un point situé à l'infini sur la direction de ses rayons; en conséquence, la ligne d'ombre propre s'obtiendra comme la courbe de contact de l'objet proposé avec une surface cylindrique, et la limite de l'ombre portée, comme l'intersection de cette surface cylindrique avec une surface donnée. Il serait d'ailleurs facile, en se fondant sur les considérations théoriques du n° 53, de modifier ces constructions pour les approprier aux problèmes où le point lumineux est à une distance finie : on substituerait un cône au cylindre.

Cela posé, étant donnés un objet éclairé, la direction des rayons solaires et la surface qui reçoit l'ombre, nous chercherons à déterminer, par des opérations géométrales, ces deux lignes de contact et d'intersection, au moyen d'un nombre convenable de leurs points principaux, dont nous calculerons ensuite les coordonnées perspectives, conformément à notre méthode habituelle. Ces opérations dépendront de la nature géométrique de l'objet éclairé, à l'égard de laquelle nous allons examiner sommairement les cas les plus généraux.

**194.** D'abord, l'objet peut se réduire à une ligne, droite ou courbe; dans ce cas, qui est le plus simple, il ne peut y avoir à déterminer de lignes d'ombre propre : on obtient l'ombre portée, en construisant l'intersection de la surface qui reçoit l'ombre avec un plan conçu suivant la droite donnée, parallèlement aux rayons de lumière, ou avec une

Digitized by Google

surface cylindrique dont les arêtes, parallèles aux mêmes rayons, passent par la courbe proposée.

Quand une droite porte ombre sur un plan, le meilleur moyen d'obtenir cette intersection consiste à faire passer deux rayons par les extrémités de la droite ou par deux quelconques de ses points, et à construire leurs rencontres avec le plan proposé : l'ombre portée est la droite de jonction de ces rencontres. Mais si la droite porte ombre sur une surface courbe, il est souvent préférable, pour l'opération de géométrie descriptive, de construire d'abord les traces du plan conçu parallèlement aux rayons de lumière, sur deux plans de projections, dont le choix est déterminé par les circonstances du problème. Dans le cas d'une ligne courbe, on obtient presque toujours, de la manière la plus simple, la ligne d'intersection des deux surfaces ci-dessus, en construisant directement les rencontres des rayons de lumière qui passent par la courbe avec la surface qui reçoit l'ombre.

195. En second lieu, l'objet peut être polyédrique. Après avoir reconnu quelles sont les faces éclairées du polyèdre, et par suite le système de lignes droites qui les sépare des faces obscures, on construit, comme cela vient d'être indiqué, les ombres portées par ces lignes.

Mais il peut arriver qu'on ne reconnaisse pas de prime abord quelles sont toutes les faces éclairées. Si donc on est dans le doute à l'égard de quelque face d'un polyèdre convexe, le meilleur expédient pour sortir d'embarras est de supposer successivement cette face éclairée et obscure, et de construire, dans ces hypothèses, les deux lignes d'ombre portée, soit en projection géométrale, soit sur le tableau : celle de ces lignes qui enveloppera l'autre devra être conservée.

Un polyèdre à parties rentrantes est susceptible de porter ombre sur lui-même ; à cela près, la détermination de sa

Digitized by Google

ligne d'ombre propre rentre dans ce qui précède, puisqu'il peut se décomposer en polyèdres convexes.

Dans tous les cas, il arrive généralement que plusieurs côtés du polygone de séparation d'ombre et de lumière, à la surface d'un polyèdre, sont invisibles du point de vue. Les côtés visibles doivent seuls figurer sur le tableau, ou du moins y être conservés d'une manière définitive; mais la construction géométrale de l'ombre portée visible exige souvent celle de ce polygone tout entier; et, en outre, il peut être utile, pour la construction de la perspective, d'y comprendre provisoirement quelques-uns des sommets invisibles. Par exemple, quand une droite invisible s'appuie et porte ombre sur un terrain horizontal, on construit sur le tableau l'extrémité inférieure de cette droite, bien qu'elle soit invisible, avec l'ombre portée par son extrémité supérieure, et l'on tire une droite du second point vers le premier.

196. Troisièmement, considérons un objet de forme conique ou cylindrique. La ligne d'ombre propre se compose des arêtes de contact de deux plans tangents, parallèles aux rayons de lumière, et on les obtient par le procédé relatif aux plans tangents à toute surface de cette espèce. Ainsi, pour un cône, on imagine par son sommet un rayon solaire, dont on construit la rencontre avec le plan de la base; du point de rencontre on mène des tangentes à cette courbe, et les contacts déterminent les arêtes de contact.

Si la surface qui reçoit l'ombre est le plan même de la base, les deux tangentes ci-dessus sont les limites de l'ombre portée. Dans tous les cas, ces limites sont les ombres portées par les deux arêtes de contact.

A l'égard d'un tronc de cône, après avoir déterminé son sommet, on opère pareillement sur le cône entier.

S'il s'agit d'un cylindre, on conçoit, par un point quel-

Digitized by Google

conque de l'espace, un rayon solaire et une parallèle à la génératrice ; on construit les traces de ces lignes sur le plan de la base, et on les joint par une droite ; deux tangentes menées à la courbe parallèlement à cette droite sont les traces de deux plans tangents, parallèles aux rayons de lumière, et la solution du problème en résulte comme ci-dessus. Pour un cylindre vertical, les deux tangentes sont parallèles à la projection horizontale d'un rayon lumineux, et se construisent immédiatement.

197. Supposons l'objet terminé par une surface de révolution. Nous lui appliquerons la méthode des cônes enveloppes du n° 152, ou, si l'on veut, une extension de cette méthode. A cet effet, concevons une suite de sections perpendiculaires à l'axe de révolution ; nous considérerons chacune d'elles comme la base d'un cône tangent, extérieur ou intérieur, ayant nécessairement son sommet sur l'axe ; nous construirons ses arêtes d'ombre propre, ou seulement les points où elles rencontrent la base ; ces points appartiendront à la ligne d'ombre propre de la surface proposée, puisque les rayons solaires, qui passent par ces points, doivent être tangents au cône, et par suite l'être aussi à cette surface. Les mêmes rayons, prolongés suffisamment, serviront à la construction de l'ombre portée.

198. Dans le cas général d'une surface courbe quelconque, on conçoit parallèlement aux rayons lumineux une suite de plans sécants, dont on construit les intersections avec la surface. Des tangentes à ces courbes, menées parallèlement aux rayons, déterminent la ligne d'ombre propre par leurs contacts, et celle d'ombre portée par leurs prolongements jusqu'à la surface qui doit la recevoir ; on choisit, d'ailleurs, le système de plans sécants le plus favorable aux constructions, le plus ordinairement des plans verticaux.

Digitized by Google

199. Quelle que soit la surface courbe de l'objet, la portion visible de sa ligne d'ombre propre doit seule être représentée sur le tableau ; mais, ainsi que pour les surfaces polyédriques, la détermination géométrale de l'ombre portée peut exiger celle de la ligne tout entière.

Enfin, dans chaque problème, nous nous rappellerons l'important moyen de vérification que fournit la théorie (54). Toutes les droites menées sur le tableau, des divers points des objets à leurs ombres portées, devront se trouver dirigées vers un même point, parce qu'elles représentent des droites parallèles dans l'espace. Ce point de concours est la perspective du soleil, réelle ou imaginaire, selon que cet astre est au delà ou en deçà du plan central.

OMBRE PORTÉE PAR UN ÉDIFICE. (*Fig.* 131.)

200. *Un édifice, d'une architecture régulière, porte ombre sur un terrain horizontal. Sa façade* ABFE *est longue de* 24 *mètres et haute de* 12 *mètres, et sa déclinaison* = 3 : 2, *de sens tel qu'elle s'éloigne vers la droite. Son épaisseur* AC = 8 *mètres; sa toiture est à quatre versants inclinés de* 45 *degrés. On donne pour le point de la base le plus rapproché :*

$$A \begin{cases} X = \phantom{-}9^{m}, \\ Y = -\ 8, \\ Z = \phantom{-}70. \end{cases}$$

*Les rayons de lumière ont une déclinaison* = 1 : 3 *et une inclinaison* = 1 : 2, *le soleil étant en deçà du tableau et à droite du plan normal.*

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Il est assez facile de reconnaître que trois faces seulement du polyèdre ne sont pas éclairées, et que la séparation d'ombre et de lumière est une ligne brisée AEMGHND, par-

Digitized by Google

tiellement invisible. Concevant donc des rayons solaires par les points E, M, G, H, N, nous pourrions construire les rencontres de ces rayons avec le plan de la base de l'édifice, qui serait pris pour géométral; opération fort simple de géométrie descriptive (232). Mais les ombres portées par les horizontales ME, GH, devant être égales et parallèles à ces droites, l'intervalle des ombres portées par M et N devant aussi être égal et parallèle à MN, il suffit d'effectuer la construction pour les deux points E, G. Les ombres de ces différents points seront désignées par les lettres $E_1$, $M_1$, $G_1$, etc.

Si nous n'avions pas reconnu de prime abord quelles devaient être les faces éclairées, la construction des ombres sur le plan géométral aurait fait cesser notre incertitude. Nous eussions trouvé qu'effectivement la ligne brisée $AE_1M_1G_1H_1N_1D$ enveloppe toutes celles que l'on peut mener de l'un à l'autre de ses sommets.

Quant aux points principaux de l'édifice, leur détermination rentre dans ce qui concerne les polyèdres. Les ordonnées Y de ces points et de leurs ombres se concluent immédiatement des conditions de l'énoncé.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| B | X = | 22,31 | C | X = | 2,34 |
| | Z = | 89,97 | | Z = | 74,44 |
| G | X = | 7,89 | H | X = | 16,77 |
| | Z = | 75,55 | | Z = | 88,86 |
| $E_1$ | X = | — 13,77 | $G_1$ | X = | — 22,47 |
| | Z = | 77,59 | | Z = | 85,12. |

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $x = 386^{mm}$ | $b$ | $x = 744$ | $c$ | $x = 94$ |
| | $y = -343$ | | $y = -267$ | | $y = -322$ |
| $d$ | $x = 498$ | | $ae = 514$ | | $cm = 484$ |
| | $y = -254$ | | $bf = 400$ | | $dn = 381$ |
| $g$ | $x = 327$ | $h$ | $x = 566$ | $e_1$ | $x = -532$ |
| | $y = 318$ | | $y = 270$ | | $y = -309$ |
| $m_1$ | $x = -747$ | $g_1$ | $x = -792$ | $h_1$ | $x = -414$ |
| | $y = -293$ | | $y = -282$ | | $y = -244$ |
| $n_1$ | $x = -209$ | | | | |
| | $y = -235$. | | | | |

Ayant construit ces valeurs et la perspective de l'édifice, nous tirons les droites $ae_1$, $e_1m_1$, $m_1g_1$, $g_1h_1$, $h_1n_1$, $n_1d$, cette dernière droite passant par le point invisible $d$ de la base, et le problème est résolu.

Si nous achevons l'édifice dans sa partie invisible, il faut que les droites $e_1e$, $m_1m$, $g_1g$, $h_1h$, $n_1n$, aient des directions concourantes en un même point, perspective imaginaire du soleil : mais ce point de concours est fort éloigné ; on calculerait sa position par la règle du n° 110. Les droites $e_1a$, $m_1c$, $n_1d_1$, si elles étaient tracées, concourraient en un point de la ligne d'horizon situé verticalement au-dessous du précédent. Enfin, $ab$, $cd$, $gh$, $g_1h_1$, ont leur point de concours sur la même ligne, à la distance de 2 mètres du centre perspectif.

OMBRE PORTÉE PAR UN PAVILLON. (*Fig.* 132.)

**201.** *La base* ABCD *est un carré dont les côtés, longs de* $2^m,8$, *déclinent de* 45 *degrés. Le toit déborde sur les faces, de telle manière que chaque côté du carré* FEMG $= 4^m,6$. *Le sommet* H *est situé à* $1^m,4$ *au-dessus du*

Digitized by Google

*plan de ce carré et à* $3^m,8$ *au-dessus de la base de l'édifice.*

$$A \begin{cases} X = & 3^m,0 \\ Y = - & 4,5 \\ Z = & 30,0. \end{cases}$$

*La déclinaison de la lumière* $= 1:3$, *son inclinaison* $= 3:10$, *le soleil étant au delà du tableau et à droite du plan normal.*

*La distance centrale* $= 3$ *mètres.*

Dans ce problème nous avons à considérer l'ombre portée par l'édifice sur le sol et celle qui est portée par les bords du toit sur une des faces visibles.

Pour déterminer la première, il serait utile de reconnaître, à priori, si tous les versants du toit sont éclairés; mais je suppose que nous soyons dans le doute à cet égard. Prenant pour géométral le plan de la base de l'édifice, nous construisons sur l'épure les points $F_1$, $G_1$, $H_1$, $M_1$, où des rayons solaires, conçus par les points F, G, H, M, rencontrent ce plan, et nous trouvons qu'ils forment une ligne brisée convexe $F_1 H_1 G_1 M_1$. Le point $H_1$, n'étant pas enveloppé et portant ombre entre $F_1$ et $G_1$, nous concluons que les versants du toit ne sont pas tous éclairés et que le triangle FGH est dans l'ombre. La ligne de séparation à la surface de l'édifice, qui porte ombre sur le terrain, se compose, en conséquence, des arêtes verticales qui passent en A et C, de la ligne brisée FHGM, et de deux portions des bords FE, ME du toit, qui vont être déterminées.

L'ombre portée par FE, sur le plan vertical AB, doit être horizontale; il suffit donc, pour l'obtenir, de construire le seul point $E_1$, ombre portée par le point E, et cette construction est facile (232) : de là résulte la ligne d'ombre $E_1K$. Nous déterminons pareillement sur la face invisible contiguë à la précédente la ligne d'ombre NL; enfin, les

Digitized by Google

points $K_1$, $N_1$, ombres portées sur le sol par les points K et N. Les lignes $F_1K_1$, $K_1A$, $M_1N_1$, $N_2D$ serviront à compléter les limites de l'ombre sur le sol; $KE_1$, $E_1L$ seront celles de l'ombre sur la face éclairée visible.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B | X = | 4,980 m | G | X = | — 0,253 |
| | Z = | 31,980 | | Z = | 31,980 |
| H | X = | 3,000 | F | X = | 3,000 |
| | Z = | 31,980 | | Z = | 28,727 |
| $N_1$ | X = | — 3,317 | $M_1$ | X = | — 4,590 |
| | Z = | 31,854 | | Z = | 32,703 |
| $G_1$ | X = | — 7,842 | $H_1$ | X = | — 9,017 |
| | Z = | 29,450 | | Z = | 26,994 |
| $F_1$ | X = | — 4,590 | $K_1$ | X = | — 2,681 |
| | Z = | 26,197 | | Z = | 28,106 |
| $E_1$ | X = | 4,344 | | | |
| | Y = | — 2,704 | | BL = | 1,998. |
| | Z = | 31,344 | | | |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | mm | | | | | | |
| $a$ | $x$ = | 300 | $b$ | $x$ = | 468 | $c$ | $x$ = | 265 |
| | $y$ = | — 450 | | $y$ = | — 422 | | $y$ = | — 398 |
| $d$ | $x$ = | 96 | $g$ | $x$ = | — 24 | $h$ | $x$ = | 282 |
| | $y$ = | — 422 | | $y$ = | — 197 | | $y$ = | — 66 |
| $f$ | $x$ = | 313 | $e$ | $x$ = | 586 | $n_1$ | $x$ = | — 312 |
| | $y$ = | — 219 | | $y$ = | — 197 | | $y$ = | — 424 |
| $m_1$ | $x$ = | — 421 | $g_1$ | $x$ = | — 799 | $h_1$ | $x$ = | — 1002 |
| | $y$ = | — 413 | | $y$ = | — 458 | | $y$ = | — 500 |
| $f_1$ | $x$ = | — 525 | $k_1$ | $x$ = | — 286 | $e_1$ | $x$ = | 416 |
| | $y$ = | — 515 | | $y$ = | — 480 | | $y$ = | — 259 |

$ak$ = 180
$bl$ = 187.

Digitized by Google

Nous portons ce résultat sur la toile et traçons sans difficulté la perspective demandée. Le point invisible $c$ doit faire partie de la construction, parce qu'il sert à déterminer la direction $n_1c$. Les lignes fictives $hh_1$, $gg_1$, $ff_1$, ... concourent en un même point, perspective réelle du soleil.

OMBRE PORTÉE PAR LE PAVILLON AVEC FENÊTRES DU N° 128.
(*Fig.* 133.)

202. *Les conditions du problème relatives à l'édifice et à la distance centrale sont celles du n° 128, la déclinaison de la lumière = 45 degrés, et sans inclinaison = 60 degrés, le soleil étant au delà du tableau et à gauche du plan normal.*

Il s'agit de construire l'ombre portée par l'édifice sur le sol, et celle que projettent les fenêtres, tant sur le sol que sur le toit. A cet effet, nous reconnaissons d'abord que les quatre versants du toit sont éclairés; que chacune des deux fenêtres, dont les ombres portées sont visibles, a deux faces obscures, savoir : HGK et GIN, G'H'K' et G'I'N'. Les lignes de séparation à la surface de ces polyèdres sont donc NIKJH et N'I'K'J'H'. Les deux murs verticaux visibles sont obscurs.

Les ombres $D_1C_1$ et $C_1F_1$, portées sur le sol par les bords du toit, sont respectivement égales et parallèles à DC et CF. Le seul point $D_1$ déterminera donc ces ombres, et nous le construisons.

Nous construisons pareillement les points $I_1$, $K_1$, $J_1$, où des rayons solaires conçus par I, K, J rencontrent le sol; nous trouvons qu'ils tombent en dehors des lignes $D_1C_1$ et $C_1F_1$, ce qui nous apprend qu'en effet les points I, K, J portent ombre sur le sol. D'ailleurs, $I_1$ se conclut immédiatement de $J_1$, de même que $C_1$ s'est conclu de $D_1$.

Le rayon conçu par le point J détermine, avec la droite HJ, un plan vertical dont nous construisons (233) l'inter-

Digitized by Google

section U avec DC. De là résulte la droite UH, ombre portée sur le toit par une portion de HJ. De même, le rayon conçu par le point I détermine, avec l'horizontale IN, un plan dont nous construisons l'intersection T avec DC; et la droite TN est l'ombre portée sur le toit par une portion de cette horizontale.

Pour avoir les ombres portées sur le sol par les deux autres portions des droites JH et IN, nous pourrions concevoir des rayons de lumière par les points U et T déjà obtenus, construire les ombres $U_1$ et $T_1$ portées par ces deux points, et tirer ensuite les lignes $U_1J_1$ et $T_1I_1$. Mais nous remplacerons cette construction par une opération sur le tableau.

Le soleil, d'après les conditions du problème, se trouvant situé dans un plan diagonal de l'édifice, il y a égalité de grandeur et parfaite similitude de position dans les ombres portées par les deux fenêtres HGK et H'G'K', les unes étant à gauche du plan diagonal, comme les autres le sont à droite. Ainsi, T' et U', par exemple, sont situés sur CF, comme T et U sur CD. On peut donc profiter de cette remarque pour former arithmétiquement les valeurs des coordonnées des points $I'_1$, $K'_1$, ... au moyen de celles déjà trouvées pour I, K, ....

*Résultat géométral.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $D_1$ | X = — 6,569 m<br>Z = 17,796 | $J_1$ | X = — 3,938<br>Z = 17,471 |
| $K_1$ | X = — 3,093<br>Z = 17,226 | U | X = — 6,467<br>Z = 20,000 |
| T | X = — 4,943<br>Z = 20,000. | | |

Digitized by Google

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | $x = -927^{mm}$, $y = -1292$ | $f_1$ | $x = -199$, $y = -1018$ | $j_1$ | $x = -564$, $y = -1316$ |
| $k_1$ | $x = -449$, $y = -1335$ | $d_1c_1 =$ | 674 | $du =$ | 292 |
| | | $j_1i_1 =$ | 170 | $dt =$ | 482 |
| $j'_1$ | $x = -185$, $y = -1154$ | $i'_1$ | $x = -197$, $y = -1227$ | $k'_1$ | $x = -165$, $y = -1205$ |
| $u'$ | $x = -445$, $y = -423$ | $t'$ | $x = -477$, $y = -454$ | | |

Le résultat perspectif ayant été porté sur la toile, nous tirons les lignes de jonction $hu$, $nt$, $bd_1$, $d_1c_1$, ... et nous n'avons plus qu'à construire les petites droites $j_1u_1$, $i_1t_1$, $j'_1u'_1$, $i_1t_1$. Mais d'abord $i_1t_1$ doit être dirigée vers le centre perspectif, tandis que $i'_1t'_1$ est horizontale: nous tirons donc ces lignes dans ces directions, à partir de $i_1$ et $i'_1$. Nous obtenons $j_1u_1$ et $j'_1u'_1$, en les dirigeant des points $j_1$ et $j'_1$ vers les pieds des verticales $jh$ et $j'h'$, prolongées jusqu'à la base de l'édifice dans l'espace : à cet effet, du point $r$, où la direction $gh$ rencontre $sd$, nous abaissons la verticale $ro$ jusqu'à la diagonale $be$, nous tirons l'horizontale $ol$, dont la rencontre avec le prolongement de $jh$ représente le pied de cette verticale. Nous dirigeons donc $j_1u_1$ vers le point $l$. Une construction analogue, indiquée par la figure, s'applique à $j'h'$.

OMBRE PORTÉE PAR UN ÉDIFICE AVEC SES CHEMINÉES. (*Fig.* 134.)

203. *L'édifice est symétrique : la hauteur de sa façade* = 10 *mètres, sa longueur* 16 *mètres, son épaisseur* 6 *mètres. La déclinaison de la façade* = 5 : 3, *dans un sens qui l'éloigne de gauche à droite. La toiture se compose de quatre versants tels, que la crête* GH *est longue de*

Digitized by Google

*8 mètres et située à 13 mètres au-dessus du sol. Les cheminées prolongent les murs latéraux: leur hauteur* JI, *mesurée extérieurement,* $= 3^m, 8$, *leur largeur* IP, *2 mètres, et leur épaisseur* IM *est de* $0^m, 8$. *On donne pour le point de la base le plus rapproché:*

$$A \begin{cases} X = -10^m, \\ Y = -7, \\ Z = 50. \end{cases}$$

*La déclinaison de la lumière* = 45 *degrés, et son inclinaison* = 30 *degrés, le soleil étant en deçà du tableau et à gauche du plan normal.*

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Nous avons à construire les ombres du corps de l'édifice et de l'une des cheminées sur le sol, celles de l'autre cheminée sur le toit et, s'il y a lieu, sur le sol. Le versant de la toiture le plus éloigné CHV est obscur, mais l'ombre qu'il porte sur la cheminée adjacente ne saurait être visible.

Or, deux des quatre murs de l'édifice sont obscurs, aussi bien que le versant CHV, et la ligne d'ombre propre est en conséquence, abstraction faite des cheminées, le polygone ADEHVO, dont nous déterminons l'ombre sur le sol par l'opération connue.

Deux faces verticales de chaque cheminée, analogues par leur position aux deux précédentes du corps de l'édifice, sont pareillement privées de lumière, et leurs lignes de séparation sont JIMKL, N'M'I'P'Q'. Nous construisons les points $M'_1$, $I'_1$, $P'_1$, ombres portées sur le sol par M', I', P' : ils suffiront avec les points R et S, pieds des verticales abaissées des points P', M', jusqu'à la base de l'édifice, pour la détermination de l'ombre de la cheminée dont ils dépendent.

Des rayons solaires étant conçus par les points I, M, K, de la cheminée la plus rapprochée, nous cherchons (233) les rencontres des deux premiers avec le plan du versant



Digitized by Google

DCHG, et nous trouvons que la rencontre a lieu dans les limites de ce quadrilatère, en des points $I_1$, $M_1$ : il s'ensuit que cette cheminée ne porte pas ombre sur le terrain. Nous remarquons, d'ailleurs, que $I_1M_1$ est égal et parallèle à IM, de manière que l'un des deux points détermine l'autre. Nous construisons semblablement la rencontre du troisième rayon avec le plan FGD, et obtenons un point $K_1$ intérieur au triangle. L'ombre de KM, ainsi que celle IJ, se partage donc entre les deux versants. Nous déterminons le point U, où celle-ci coupe l'arête GD, comme l'intersection de cette arête avec le plan vertical $JII_1$, parallèle aux rayons solaires; et le point T, où l'ombre de MK coupe la même arête GD, comme l'intersection de cette droite avec le plan incliné $KMM_1$, également parallèle aux rayons et passant par l'horizontale KM.

En exécutant ces diverses constructions, il convient de prendre pour géométral le plan du terrain, dans la détermination des ombres qu'il contient, et le plan de la base de la toiture pour celle des points $I_1$, $M_1$, $K_1$, parce que les droites DC, DF représentent alors les traces géométrales des plans dont on cherche les intersections avec des droites. Ces deux conventions successives permettent d'ailleurs d'effectuer facilement toute l'opération sur la même épure.

Les ordonnées Y sont connues pour tous les points, si l'on excepte $I_1$, $M_1$, $K_1$, T, U, N, L.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| B | X = | — 1,77 | E | X = | — 15,14 |
| | Z = | 63,72 | | Z = | 53,09 |
| G | X = | — 10,51 | H | X = | — 6,40 |
| | Z = | 54,97 | | Z = | 61,83 |
| P | X = | — 13,43 | I | X = | — 11,71 |
| | Z = | 52,06 | | Z = | 51,03 |

Digitized by Google

| | | | |
|---|---|---|---|
| MN = 3,12 m | | $D_1$ | X = 2,25<br>Z = 10,48 |
| $H_1$ | X = 9,52<br>Z = 77,75 | $I'_1$ | X = 13,42<br>Z = 81,65 |
| $I_1$ | X = — 7,91<br>Y = 3,70<br>Z = 54,83 | $K_1$ | X = — 11,28<br>Y = 5,39<br>Z = 54,48 |
| U | X = — 10,26<br>Y = 4,50<br>Z = 52,49 | T | X = — 10,41<br>Y = 5,39<br>Z = 53,95 |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $x = -600$<br>$y = -420$ mm | $b$ | $x = -83$<br>$y = -333$ | $e$ | $x = -856$<br>$y = -396$ |
| $o$ | $x = -310$<br>$y = -314$ | | $ad = 600$<br>$bc = 474$ | | $ef = 565$<br>$ov = 448$ |
| $g$ | $x = -574$<br>$y = 327$ | $h$ | $x = -310$<br>$y = 291$ | $p$ | $x = -774$<br>$y = 392$ |
| $i$ | $x = -689$<br>$y = 399$ | $m$ | $x = -656$<br>$y = 395$ | | $mn = 181$ |
| $l$ | $x = -740$<br>$y = 209$ | $i'$ | $x = -161$<br>$y = 315$ | $k'$ | $x = -258$<br>$y = 313$ |
| $m'$ | $x = -182$<br>$y = 318$ | $r$ | $x = -237$<br>$y = -319$ | | $m's = 500$ |
| $d_1$ | $x = 108$<br>$y = -337$ | $c_1$ | $x = 414$<br>$y = -277$ | $h_1$ | $x = 380$<br>$y = -270$ |
| $v_1$ | $x = 203$<br>$y = -266$ | $i'_1$ | $x = 493$<br>$y = -257$ | $m'_1$ | $x = 481$<br>$y = -259$ |
| $p'_1$ | $x = 413$<br>$y = -254$ | $i_1$ | $x = -433$<br>$y = 202$ | $m_1$ | $x = -405$<br>$y = 198$ |
| $k_1$ | $x = -621$<br>$y = 300$ | $u$ | $x = -586$<br>$y = 257$ | $t$ | $x = -579$<br>$y = 300$. |



Digitized by Google

La perspective de l'édifice et celle de ses ombres se construisent immédiatement, les points invisibles $o$, $r$, $s$, $l$ servant pour les ombres des verticales dont ils font partie. Le point $h_1$ se trouve dans l'ombre portée par l'une des cheminées sur le sol, mais il détermine la direction des lignes $v_1h_1$, $c_1h_1$. La petite droite $m_1i_1$, parallèle à $dc$ dans l'espace, doit concourir avec elle sur la ligne d'horizon, de même que $d_1c_1$, $im$, $i'm'$, etc. Enfin, le point de concours des lignes fictives $dd_1$, $cc_1$, ... sera situé verticalement au-dessous du point de distance, vers la droite, la déclinaison de la lumière étant de 45 degrés.

OMBRE PORTÉE PAR LA TOURELLE DU N° 167. (*Fig.* 135.)

204. *La déclinaison de la lumière* = 1:3, *et son inclinaison* = 45 *degrés, le soleil étant au delà du tableau et à gauche du plan normal, toutes les autres conditions étant celles du n°* 167.

Le toit de la tourelle n'est pas totalement éclairé et porte ombre sur le terrain. Une moitié de la surface cylindrique est privée de lumière. Soient $S\gamma$, $S\delta$ et $\varepsilon\varphi$, $\rho\theta$ les arêtes de séparation sur le cône et le cylindre; la ligne qui porte ombre sur le sol, du moins abstraction faite de la fenêtre, se compose de $\varepsilon\varphi\gamma S\delta\theta\rho$, dont la seconde moitié est invisible.

Nous reconnaissons également, sans beaucoup de peine, que la fenêtre doit porter ombre sur trois surfaces, le cône, le cylindre et le sol. Les deux versants de son toit sont éclairés, et la ligne brisée IJNGMFK est celle qui doit déterminer les limites de cette ombre.

Cela posé, prenant pour géométral le plan de la base du cône, nous déterminons les points $\gamma$, $\delta$, $\varphi$, $\theta$, et par suite les ombres portées $S_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$, $\varphi_1$, $\theta_1$. Les deux arcs de cercle $\varphi_1\gamma_1$, $\delta_1\theta_1$, qui font partie du contour de l'ombre, sont égaux entre eux et aux arcs $\varphi\gamma$, $\delta\theta$; ils ont assez peu d'éten-

Digitized by Google

due pour que nous puissions nous dispenser d'en chercher les points intermédiaires. D'ailleurs, l'un d'eux doit être en partie recouvert par l'ombre de la fenêtre dont nous allons nous occuper.

L'ombre de la verticale IJ tombe dans l'intérieur de l'ouverture, sur des surfaces invisibles. JN, vers son extrémité N, porte ombre sur le cylindre et sur le terrain, NG et GM sur le terrain, MK sur le cône et sur le terrain.

L'ombre d'une portion de NJ sur le terrain devant être parallèle à cette droite elle-même, nous en construisons le seul point $N_1$ : à partir de ce point, elle sera prolongée, suivant sa direction connue, jusqu'à la rencontre de l'ombre portée par le cylindre. L'ombre portée sur le cylindre par une autre portion de NJ est l'intersection de cette surface avec le plan $J_1JN$, parallèle aux rayons solaires. Pour obtenir cette intersection, il faut couper le plan dont il s'agit par une série de plans horizontaux (243), et nous en prenons trois, conçus à $2^m,8$, $2^m,6$ et $2^m,4$ au-dessus du plan d'horizon : ils donnent trois points A, B, C de la courbe demandée : nous leur joignons le point U, où l'ombre rencontre le bord du toit; nous le déterminons en le considérant comme l'intersection du même plan avec un cercle (250).

Nous construisons $G_1M_1$, ombre portée sur le sol par une première portion de MK, de la même manière que celle de NJ. Le reste de MK porte ombre sur le toit, et nous l'obtenons comme l'intersection du cône avec le plan $M_1MK$ : à cet effet (245), nous coupons par quatre plans horizontaux conçus à $3^m,4$, $3^m,7$, 4 mètres et $4^m,30$, au-dessus du plan d'horizon, d'où résultent les points O, P, Q, R, auxquels nous ajoutons le point T, rencontre de l'ombre avec le bord du toit, c'est-à-dire intersection du même plan avec le cercle.

Enfin, pour déterminer exactement l'ombre portée sur

Digitized by Google

le sol par la première portion de MK, nous concevons un rayon de lumière par le point T qui vient d'être obtenu, et construisons le point $T_1$, d'où résulte pour cette ombre la droite $M_1T_1$.

On voit que les opérations de détails sont assez nombreuses; mais aucune d'elles en particulier n'est difficile. Nous avons construit les intersections du cylindre et du cône, sans indiquer le choix du plan géométral : il convient de prendre le plan du terrain pour la première, et celui de la base du cône pour la seconde; en un mot, celui qui semble le plus commode pour la construction de la trace du plan de la section.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| $\varphi$ | X = | 0,05 | $\theta$ | X = | 1,05 |
| | Z = | 17,15 | | Z = | 22,85 |
| $\gamma$ | X = | 2,51 | $S_1$ | X = | 11,44 |
| | Z = | 17,41 | | Z = | 16,52 |
| $\varphi_1$ | X = | 6,69 | $\theta_1$ | X = | 7,69 |
| | Z = | 14,94 | | Z = | 20,63 |
| $\gamma_1$ | X = | 9,15 | $\delta_1$ | X = | 10,40 |
| | Z = | 15,19 | | Z = | 18,96 |
| $N_1$ | X = | 6,00 | $G_1$ | X = | 7,06 |
| | Z = | 15,21 | | Z = | 14,49 |
| $T_1$ | X = | 7,76 | U | X = | — 0,60 |
| | Z = | 14,79 | | Z = | 17,46 |
| A | X = | — 0,44 | B | X = | — 0,27 |
| | Z = | 17,37 | | Z = | 17,28 |
| C | X = | — 0,10 | T | X = | 1,12 |
| | Z = | 17,21 | | Z = | 17,01 |
| O | X = | 0,91 | P | X = | 0,77 |
| | Z = | 17,30 | | Z = | 17,54 |

Digitized by Google

$$Q \begin{cases} X = & 0,63 \\ Z = & 17,78 \end{cases} \quad R \begin{cases} X = & 0,51 \\ Z = & 18,04. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $x =$ 3 mm, $y =$ 175 | $\theta$ | $x =$ 46, $y =$ 131 | $\gamma$ | $x =$ 144, $y =$ 172 |
| $s_1$ | $x =$ 693, $y =$ — 242 | $\varphi_1$ | $x =$ 448, $y =$ — 268 | $\theta_1$ | $x =$ 373, $y =$ — 194 |
| $\gamma_1$ | $x =$ 602, $y =$ — 263 | $\delta_1$ | $x =$ 549, $y =$ — 211 | $n_1$ | $x =$ 395, $y =$ — 263 |
| $g_1$ | $x =$ 487, $y =$ — 276 | $m_1$ | $x =$ 502, $y =$ — 283 | $t_1$ | $x =$ 525, $y =$ — 270 |
| $u$ | $x =$ — 34, $y =$ 172 | $a$ | $x =$ — 25, $y =$ 161 | $b$ | $x =$ — 16, $y =$ 150 |
| $c$ | $x =$ — 6, $y =$ 140 | $t$ | $x =$ 66, $y =$ 176 | $o$ | $x =$ 53, $y =$ 194 |
| $p$ | $x =$ 44, $y =$ 211 | $q$ | $x =$ 35, $y =$ 225 | $r$ | $x =$ 28, $y =$ 238. |

Ces points étant obtenus sur la toile, nous traçons sans difficulté les droites et les courbes qu'ils servent à déterminer. La verticale $\varphi\varepsilon$, déterminée par le point $\varphi$, limite la surface obscure du cylindre, à partir de sa rencontre avec la courbe *uabc*. Le point $n_1$ est l'extrémité d'une petite droite $n_1u_1$ qui doit être dirigée vers le point distance comme $m_1t_1$, et que nous traçons, sans erreur sensible, d'après cette condition. Nous décrivons les deux petits arcs elliptiques $\varphi_1t_1\gamma_1$, $\theta_1\delta_1$, qui ont peu de courbure et peuvent se comparer aux arcs correspondants de la base du cylindre ; ils se raccordent avec les droites $\varepsilon\varphi_1$, $\gamma_1s_1$, $s_1\delta_1$, $\rho\theta_1$. Les courbes *uabc*, *topqr*, sont des arcs elliptiques dans l'espace et, par conséquent, des arcs de même nature sur le tableau ; elles ne se raccordent pas avec les droites $\varepsilon\varphi$, *mk*, non plus qu'avec la base du cône.

Digitized by Google

OMBRE INTÉRIEURE D'UNE NICHE. (*Fig.* 136.)

**205.** *La niche est une surface cylindrique, à base demi-circulaire, creusée dans l'épaisseur d'une muraille, et se terminant par un quart de sphère. Le rayon* AI *de la base* $= 0^m,8$, *la hauteur* BD *du cylindre* $2^m,4$; *la déclinaison de* AI *est de* 2:5, *cette droite s'éloignant vers la gauche.*

$$I \begin{cases} X = & 1,7^m \\ Y = - & 3,4 \\ Z = & 15,0. \end{cases}$$

*La déclinaison de la lumière* = 12:5 *et son inclinaison* = 1:2, *le soleil étant en deçà du tableau et à droite du plan normal.*

*La distance centrale* $= 2^m,4$.

Nous avons à construire les ombres portées dans l'intérieur de la niche par la verticale BD et par le demi-cercle DHC, ou seulement une portion de ce demi-cercle. Or, l'ombre BK portée sur la base est parallèle à la projection horizontale de la direction de la lumière, et s'obtient immédiatement. $KD_1$ est une verticale dont la rencontre avec le rayon mené par le point D est le point $D_1$. L'ombre du demi-cercle tombe en partie sur le cylindre et en partie sur la sphère; nous la déterminons donc en concevant par divers points du demi-cercle des rayons solaires, et construisant par des rabattements (250) leurs rencontres avec l'une ou l'autre de ces surfaces; opération très-simple, soit que l'on prenne pour géométral le plan de la base inférieure ou celui de la base supérieure du cylindre. Dans ce but, nous supposerons la demi-circonférence DHC divisée en huit parties égales aux points D, E, F, G,...: nous trouvons que les rayons $DD_1$, $EE_1$ sont les seuls qui rencontrent le cylindre; que le point $F_1$, appartenant à la sphère, est très-

Digitized by Google

voisin de la base commune aux deux surfaces; qu'enfin, au delà du sixième rayon, il n'y a plus d'intersection, et que les suivants doivent être en conséquence négligés. Cela veut dire que, si la sphère était complète, les rayons passant par le septième et le huitième point de division, rencontreraient cette surface en avant de la niche.

Le demi-cercle horizontal sera déterminé par les points A, B, K et P, ce dernier correspondant au point culminant de la perspective; et le demi-cercle vertical, par quelques-uns de ses points de division ci-dessus.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B | X = | 2,443 m | F | X = | 2,225 |
| | Y = | — 3,400 | | Y = | — 0,434 |
| | Z = | 14,703 | | Z = | 14,790 |
| M | X = | 1,416 | $D_1$ | X = | 2,012 |
| | Y = | — 0,261 | | Y = | — 1,560 |
| | Z = | 15,114 | | Z = | 15,737 |
| $E_1$ | X = | 1,956 | $F_1$ | X = | 1,807 |
| | Y = | — 1,252 | | Y = | — 0,977 |
| | Z = | 15,756 | | Z = | 15,791 |
| $G_1$ | X = | 1,625 | $H_1$ | X = | 1,454 |
| | Y = | — 0,728 | | Y = | — 0,520 |
| | Z = | 15,748 | | Z = | 15,591 |
| $M_1$ | X = | 1,320 | | | |
| | Y = | — 0,486 | | | |
| | Z = | 15,344. | | | |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | $x =$ | 150 mm | *b* | $x =$ | 399 | *ac* = | 371 |
| | $y =$ | — 533 | | $y =$ | — 555 | *bd* = | 392 |
| *f* | $x =$ | 361 | *h* | $x =$ | 272 | *m* $x =$ | 225 |
| | $y =$ | — 70 | | $y =$ | — 32 | $y =$ | — 41 |

Digitized by Google

$d_1 \begin{cases} x = 307 \\ y = -238 \end{cases}$ $d_1 k = 281$ $e_1 \begin{cases} x = 298 \\ y = -191 \end{cases}$

$f_1 \begin{cases} x = 275 \\ y = -148 \end{cases}$ $g_1 \begin{cases} x = 251 \\ y = -114 \end{cases}$ $h_1 \begin{cases} x = 224 \\ y = -80 \end{cases}$

$m_1 \begin{cases} x = 206 \\ y = -76 \end{cases}$ $p \begin{cases} x = 258 \\ y = -516. \end{cases}$

La construction de la perspective est immédiate et très-simple. La courbe $f_1 g_1 h_1 m_1$ est elliptique; on démontre en effet, par l'analyse, qu'elle est dans l'espace un arc de cercle.

OMBRE PORTÉE PAR UNE SPHÈRE SUR UNE AUTRE SPHÈRE ET SUR LE SOL. (*Fig.* 137.)

206. *Les deux sphères ont* $0^m,5$ *de rayon et sont posées sur un terrain inférieur de* $1^m,9$ *au plan d'horizon. On donne pour leurs centres :*

$$I \begin{cases} X = 0^m,2 \\ Z = 6,0 \end{cases} \qquad J \begin{cases} X = 1,15 \\ Z = 6,32. \end{cases}$$

*Les rayons solaires sont parallèles au tableau et inclinés de* 30 *degrés, le soleil étant à gauche du plan normal.*

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Nous avons à déterminer les deux lignes d'ombre propre à la superficie des sphères proposées, l'ombre portée par la première sur la seconde, et les ombres qu'elles projettent l'une et l'autre sur le sol.

Or, les lignes de séparation sont des grands cercles, ayant leurs plans perpendiculaires aux rayons solaires, et susceptibles d'être construits d'après cette condition; mais nous préférons appliquer la méthode générale du n° 198, parce qu'elle donne à la fois les points de ces lignes et les ombres portées qui leur correspondent.

En conséquence, les surfaces seront coupées par deux

Digitized by Google

séries de plans parallèles au tableau. Dans chaque section sera menée une tangente inclinée de 30 degrés : le contact appartiendra à la ligne de séparation, et la rencontre de la tangente avec le sol, c'est-à-dire avec la droite intersection du sol par le même plan sécant, sera un point de l'ombre portée sur le sol. Mais, parmi les plans de la première série, quelques-uns couperont aussi la seconde sphère, et dans ce cas les rencontres des tangentes de la première avec les sections seront autant de points de l'ombre portée sur cette sphère.

Cette conception est très-simple, et son exécution d'autant plus facile que toutes les sections sont des cercles parallèles au tableau. On peut opérer par des rabattements sur le plan du terrain pris pour géométral, ou faire usage d'un plan vertical de projection ayant le même parallélisme.

Nous prenons les plans sécants de la première série aux intervalles de $0^m,1$ : ils déterminent, à partir de celui qui passe par le centre, les points A, B, C, . . . , G, et leurs ombres portées $A_1$, $B_1$, $C_1$, . . . , $G_1$ : nous emploierons seulement quelques-uns de ces points pour la courbe ABC. . . . Trouvant, par la construction géométrale, que le point B porte ombre sur la seconde sphère et le point C sur le sol, nous intercalons un nouveau plan sécant donnant le point M, pour lequel $Z = 5^m,85$, afin d'avoir un nombre convenable de points sur la courbe $A_1B_1M_1$.

Dans la seconde série, les plans sécants sont aux intervalles de $0^m,2$ : ils donnent, à partir de celui qui passe par le centre, les points O, P, Q, V, W, U, et leurs ombres portées.

Il semblerait naturel d'appliquer la même suite de plans aux deux surfaces; mais elles ne seraient plus coupées symétriquement.

Chaque plan sécant fournit deux points de la ligne de séparation, tels que C et C′; nous négligeons ceux de ce

Digitized by Google

points ou celles de leurs ombres portées qui seraient invisibles.

Les contours apparents des sphères seront déterminés par leurs points latéraux et culminants, $\alpha$ et $\beta$, $\gamma$ et $\delta$, $\mu$ et $\nu$, $\varepsilon$ et $\varphi$.

Les ordonnées Z sont omises dans le résultat géométral ci-après, pour les points contenus dans les plans sécants; elles se concluent des suppositions faites pour ces plans. Les coordonnées des points situés au delà des plans qui passent par les centres, se concluent de celles de leurs symétriques en deçà. Les points plus élevés que les centres déterminent pareillement ceux qui sont moins élevés. Enfin, les deux sphères étant égales, il est facile de calculer les coordonnées des points O, P, Q,..., connaissant celles de A, C, E,....

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | X = | m<br>— 0,299 | $\beta$ | X = | 0,697 |
| | Y = | — 1,400 | | Y = | — 1,400 |
| | Z = | 5,975 | | Z = | 5,942 |
| $\gamma$ | X = | 0,200 | $\delta$ | X = | 0,200 |
| | Y = | — 0,905 | | Y = | — 1,876 |
| | Z = | 6,074 | | Z = | 5,847 |
| $\mu$ | X = | 0,653 | $\nu$ | X = | 1,633 |
| | Y = | — 1,400 | | Y = | — 1,400 |
| | Z = | 6,371 | | Z = | 6,192 |
| $\varepsilon$ | X = | 1,150 | $\varphi$ | X = | 1,150 |
| | Y = | — 0,905 | | Y = | — 1,878 |
| | Z = | 6,390 | | Z = | 6,175 |
| A | X = | 0,450 | C | X = | — 0,429 |
| | Y = | — 0,967 | | Y = | — 1,003 |
| | Z = | 6,000 | | Z = | 5,800 |
| E | X = | 0,350 | $G_1$ | X = | 0,769 |
| | Y = | — 1,140 | | Y = | — 1,163 |

Digitized by Google

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $X = 0,831$ <br> $Y = -1,187$ | $B_1$ | $X = 0,923$ <br> $Y = -1,252$ |
| $M_1$ | $X = 1,003$ <br> $Y = -1,313$ | $C_1$ | $X = 1,982$ |
| $D_1$ | $X = 1,866$ | $E_1$ | $X = 1,666$ |
| $F_1$ | $X = 1,066$ | $E'_1$ | $X = 0,466$ |
| $D'_1$ | $X = 0,267$ | $O_1$ | $X = 3,016$ |
| $P_1$ | $X = 2,933$ | $Q_1$ | $X = 2,616$ |
| $V_1$ | $X = 2,933$ | $W_1$ | $X = 2,616.$ |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $x = -100$ mm <br> $y = -469$ | $\beta$ | $x = 235$ <br> $y = -471$ | $\gamma$ | $x = 66$ <br> $y = -298$ |
| $\delta$ | $x = 69$ <br> $y = -642$ | $\mu$ | $x = 205$ <br> $y = -439$ | $\nu$ | $x = 529$ <br> $y = -452$ |
| $\varepsilon$ | $x = 360$ <br> $y = -283$ | $\varphi$ | $x = 373$ <br> $y = -603$ | $a$ | $x = 150$ <br> $y = -322$ |
| $c$ | $x = 148$ <br> $y = -346$ | $e$ | $x = 125$ <br> $y = -407$ | $f$ | $x = 73$ <br> $y = -509$ |
| $c'$ | $x = -10$ <br> $y = -620$ | $g_1$ | $x = 252$ <br> $y = -381$ | $a_1$ | $x = 277$ <br> $y = -396$ |
| $b_1$ | $x = 313$ <br> $y = -424$ | $m_1$ | $x = 343$ <br> $y = -449$ | $c_1$ | $x = 683$ <br> $y = -655$ |
| $d_1$ | $x = 651$ <br> $y = -667$ | $e_1$ | $x = 595$ <br> $y = -679$ | $f_1$ | $x = 388$ <br> $y = -691$ |
| $e'_1$ | $x = 166$ <br> $y = -679$ | $d'_1$ | $x = 94$ <br> $y = -667$ | $o$ | $x = 443$ <br> $y = -306$ |
| $p$ | $x = 451$ <br> $y = -328$ | $q$ | $x = 439$ <br> $y = -385$ | $q'$ | $x = 338$ <br> $y = -561$ |

Digitized by Google

$$o_1 \begin{cases} x = 954 \\ y = -601 \end{cases} \quad p_1 \begin{cases} x = 958 \\ y = -621 \end{cases} \quad q_1 \begin{cases} x = 884 \\ y = -642 \end{cases}$$

$$q'_1 \begin{cases} x = 478 \\ y = -642 \end{cases} \quad v_1 \begin{cases} x = 900 \\ y = -583 \end{cases} \quad w_1 \begin{cases} x = 778 \\ y = -565. \end{cases}$$

Nous construisons immédiatement la perspective, en observant que les lignes d'ombre propre *acef*, *opqq'* doivent se raccorder tangentiellement avec les contours apparents des sphères.

Les ombres portées sur le sol sont, dans l'espace, des ellipses ayant leurs grands axes parallèles au tableau; les courbes qui les représentent en perspective sont, en conséquence, des ellipses, mais dont les grands axes ne sont pas parfaitement horizontaux. La tangente en $f_1$ est horizontale.

Quant à la courbe $g_1 a_1 b_1 m_1$, elle représente une ligne à double courbure dans l'espace, et ne donne lieu à aucune remarque.

OMBRE PORTÉE PAR LA BASE DE COLONNE DU N° 173. (*Fig.* 138.)

207. *Les rayons solaires ont une déclinaison et une inclinaison de* 45 *degrés, le soleil étant à droite du plan normal et en deçà du tableau.*

Le fût de la colonne porte ombre sur le congé, le tore, la plinthe et le sol; la ceinture porte ombre sur le tore, et le tore sur la plinthe et le sol.

Soient $\alpha\alpha'$, $66'$ les arêtes de séparation d'ombre et de lumière à la surface du fût, la première étant seule visible. Ces lignes se déterminent immédiatement; elles sont situées dans un plan méridien déclinant de 45 degrés, perpendiculairement à la déclinaison des rayons solaires. Il en est ainsi de $\gamma\gamma'$, ligne de séparation à la surface de la ceinture.

L'ombre $\varphi\tau\alpha'$ portée par l'arête $\alpha\alpha'$ sur le congé, doit se

Digitized by Google

raccorder avec cette droite en $\alpha'$. Concevant par $\alpha\alpha'$ un plan parallèle aux rayons solaires, nous déterminons le point $\varphi$ comme l'intersection de ce plan avec le cercle supérieur de la ceinture, et autant d'autres points que nous en désirons, en coupant le congé par des plans horizontaux et déterminant les rencontres visibles des sections avec le même plan; c'est ainsi que nous obtenons le point $\tau$ situé sur une section placée à $0^m,03$ au-dessus de la ceinture. La construction géométrale est d'ailleurs très-simple (247).

Sur le tore nous remarquons : la ligne de séparation $\omega\theta\lambda$, l'ombre $\rho\sigma\varphi_1$ portée par l'arête $\alpha\alpha'$; l'ombre $\varphi_1\gamma_1$ portée par le cercle supérieur de la ceinture; enfin l'ombre $\gamma_1\gamma'$ portée par l'arête de séparation $\gamma\gamma'$. Occupons-nous d'abord de la courbe $\omega\theta\lambda$.

Nous déterminons préalablement deux de ses points, savoir, $\omega$ et $\pi$, dont le premier est le plus bas de la courbe dans l'espace, et le second situé sur le plus grand cercle du tore. Nous obtenons $\omega$ en faisant une section méridienne parallèle aux rayons solaires, et menant à la section une tangente inclinée de 45 degrés; le point $\pi$ est l'extrémité visible du diamètre du tore, qui décline de 45 degrés, perpendiculairement à la déclinaison des rayons solaires. Nous appliquons ensuite la méthode des cônes enveloppes (152 et 197), et faisons des sections horizontales à $0^m,06$, $0^m,03$ au-dessous du centre; $0^m,03$, $0^m,04$, $0^m,05$, $0^m,06$ au-dessus. Conformément à cette méthode, nous considérons les sections comme les bases d'autant de cônes enveloppant le tore, et construisons les rencontres des arêtes de séparation à la surface de ces cônes avec leurs bases, en n'opérant d'ailleurs que pour les points visibles. Nous désignons respectivement ces points par $\theta$, $\psi$, $\varepsilon$, $\delta$, $\lambda$, $\mu$. Les dernières sections sont plus rapprochées que les premières, parce que les points qu'elles déterminent serviront à la construction de l'ombre sur le sol, et parce qu'il importe

Digitized by Google

aussi de connaître avec une certaine précision la rencontre de la ligne de séparation avec la courbe $\rho\sigma\varphi_1$.

Pour avoir cette nouvelle courbe, ou l'ombre portée par $\alpha\alpha'$ sur le tore, nous faisons deux sections horizontales à $0^m,09$ et $0^m,11$ au-dessus du centre, et construisons leurs rencontres visibles avec le plan conçu suivant $\alpha\alpha'$, parallèlement à la lumière; d'où résultent les points $\rho$ et $\sigma$. Nous leur joignons le point $\varphi_1$, ombre portée sur le tore par le point $\varphi$ : pour le construire, il nous serait permis de considérer comme plane la surface du tore, d'autant plus qu'elle l'est réellement dans une largeur d'environ $0^m,015$ autour de la base de la ceinture (277) : il ne résulterait pas de cette supposition une erreur de 3 millimètres dans les valeurs des coordonnées aériennes de $\varphi_1$. Mais, pour plus d'exactitude, nous construisons, par le procédé du n° 250, l'intersection du tore avec le rayon solaire $\varphi\varphi_1$.

Si l'on voulait connaître à priori le point de rencontre des courbes $\omega\lambda$ et $\rho\sigma$, il faudrait construire la courbe d'intersection du tore avec le plan conçu suivant $\alpha\alpha'$, parallèlement aux rayons de lumière, et le point de contact de cette courbe avec une tangente inclinée de 45 degrés.

La petite courbe $\varphi_1\gamma_1$ est une ombre portée sur une surface sensiblement plane, ainsi que nous l'avons déjà observé, et par conséquent, sans erreur appréciable, un arc de cercle égal à $\varphi\gamma$. Par la même raison, $\gamma_1\gamma'$ est une ligne droite, qui s'écarte extrêmement peu de la ceinture.

Par les points $\omega$, $\theta$, $\psi$, $\pi$, $\varepsilon$ nous menons des rayons solaires qui rencontrent la surface supérieure de la plinthe dans les limites de son étendue. Ces rencontres suffisent pour caractériser l'ombre portée sur cette surface.

De nouveaux rayons conçus par $\delta$, $\lambda$, $\mu$ ne rencontrent pas la plinthe, et doivent être prolongés jusqu'au sol, où ils déterminent l'ombre portée par une portion de la surface du tore.

Digitized by Google

Enfin, nous construisons $\alpha_1$ et $\beta_1$, qui correspondent à $\alpha$ et $\beta$; nous leur ajoutons $A_1$, $B_1$, correspondants à A, B, extrémités des diamètres du cercle supérieur, qui sont parallèle et perpendiculaire au plan central.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | X = | m 2,576 | $\gamma$ | X = | 2,523 |
| | Y = | — 2,000 | | Y = | — 3,875 |
| | Z = | 9,218 | | Z = | 9,523 |
| $\varphi$ | X = | 2,357 | $\varphi_1$ | X = | 2,314 |
| | Y = | — 3,875 | | Y = | — 3,936 |
| | Z = | 9,794 | | Z = | 9,838 |
| $\omega$ | X = | 3,548 | $\theta$ | X = | 2,866 |
| | Y = | — 4,140 | | Y = | — 4,115 |
| | Z = | 9,452 | | Z = | 9,218 |
| $\psi$ | X = | 2,591 | $\pi$ | X = | 2,427 |
| | Z = | 9,306 | | Z = | 9,427 |
| $\varepsilon$ | X = | 2,306 | $\delta$ | X = | 2,269 |
| | Z = | 9,591 | | Z = | 9,671 |
| $\lambda$ | X = | 2,239 | $\mu$ | X = | 2,218 |
| | Z = | 9,757 | | Z = | 9,866 |
| $\rho$ | X = | 2,235 | $\sigma$ | X = | 2,272 |
| | Z = | 9,916 | | Z = | 9,879 |
| $\tau$ | X = | 2,492 | $\omega_1$ | X = | 3,523 |
| | Z = | 9,512 | | Z = | 9,477 |
| $\theta_1$ | X = | 2,823 | $\psi_1$ | X = | 2,527 |
| | Z = | 9,260 | | Z = | 9,369 |
| $\pi_1$ | X = | 2,342 | $\varepsilon_1$ | X = | 2,200 |
| | Z = | 9,512 | | Z = | 9,697 |
| $\delta_1$ | X = | 1,944 | $\lambda_1$ | X = | 1,906 |
| | Z = | 10,006 | | Z = | 10,089 |



Digitized by Google

$\mu_1 \begin{cases} X = 1,878 \\ Z = 10,205 \end{cases}$ $\alpha_1 \begin{cases} X = 0,826 \\ Z = 11,326 \end{cases}$

$\beta_1 \begin{cases} X = 1,674 \\ Z = 12,174 \end{cases}$ $C_1 \begin{cases} X = 1,978 \\ Z = 9,402 \end{cases}$

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $x = 673^{mm}$, $y = -522$ | $\alpha\alpha' =$ | 470 | $\gamma$ | $x = 663$, $y = -1017$ |
| $\varphi$ | $x = 602$, $y = -989$ | $\tau$ | $x = 646$, $y = -994$ | $\omega$ | $x = 939$, $y = -1095$ |
| | $x = 777$, $y = -1116$ | $\psi$ | $x = 696$, $y = -1097$ | $\pi$ | $x = 644$, $y = -1075$ |
| $\varepsilon$ | $x = 601$, $y = -1049$ | $\delta$ | $x = 584$, $y = -1038$ | $\lambda$ | $x = 574$, $y = -1026$ |
| $\mu$ | $x = 563$, $y = -1012$ | $\rho$ | $x = 563$, $y = -1000$ | $\sigma$ | $x = 575$, $y = -998$ |
| $\varphi_1$ | $x = 588$, $y = -1000$ | $\gamma_1$ | $x = 649$, $y = -1029$ | $\omega_1$ | $x = 928$, $y = -1106$ |
| $\theta_1$ | $x = 762$, $y = -1127$ | $\psi_1$ | $x = 674$, $y = -1114$ | $\pi_1$ | $x = 616$, $y = -1097$ |
| $\varepsilon_1$ | $x = 567$, $y = -1076$ | $\delta_1$ | $x = 485$, $y = -1118$ | $\lambda_1$ | $x = 472$, $y = -1109$ |
| $\mu_1$ | $x = 460$, $y = -1096$ | $\alpha_1$ | $x = 182$, $y = -988$ | $\beta_1$ | $x = 344$, $y = -919$ |
| $a_1$ | $x = 138$, $y = -952$ | $b_1$ | $x = 253$, $y = -906$ | $c_1$ | $x = 526$, $y = -1190$. |

La construction de la perspective est immédiate, si l'on excepte les lignes d'ombre qui partent de $\alpha_1$ et $\beta_1$; nous obtenons ces lignes en les dirigeant vers les points $r$ et $s$, pieds des verticales abaissées de $\alpha$ et $\beta$ jusqu'à la diagonale de la base inférieure de la plinthe, comme l'indique la figure.

Digitized by Google

## § II.

### MISE EN PERSPECTIVE DES IMAGES RÉFLÉCHIES.

208. Un objet et un miroir plan étant donnés, on obtient théoriquement (59) l'image, de grandeur et de position, en abaissant de tous les points de la surface de l'objet des perpendiculaires au miroir, ou à son plan illimité, et prolongeant chacune de ces droites d'une longueur égale à elle-même. Telle est aussi la règle la plus générale à suivre dans la pratique; mais souvent il arrive que, d'après la nature de la surface de l'objet et les conditions particulières du problème, un petit nombre de points suffisent pour assigner complétement le lieu de l'image, dont la grandeur, en vertu de la même règle, égale celle de l'objet.

La position géométrique de l'image étant connue, nous la mettrons en perspective comme un objet réel, si toutefois elle est visible du point de vue. Pour être visible, elle doit se trouver, sur le tableau, intérieure au cadre du miroir.

Si l'objet est polyédrique, plusieurs de ses sommets invisibles peuvent devenir visibles dans l'image, et réciproquement. L'opération de la mise en perspective de l'image s'applique à tous ceux de ses points qui doivent être visibles, et à ces seuls points. S'il présente une surface courbe, son contour apparent diffère nécessairement de celui de l'image, lequel se détermine par une opération spéciale.

Il résulte de ces simples considérations que toute question relative aux images réfléchies se ramène à ce qui a été dit pour les objets réels; aussi n'en prendrons-nous qu'un petit nombre d'exemples, d'ailleurs dans les deux cas les plus ordinaires, ceux où la réflexion est produite par des glaces verticales ou la surface d'une eau tranquille. Dans le premier cas, les ordonnées Y sont les mêmes pour les points de l'ob-



Digitized by Google

jet et leurs images : les X et les Z se déterminent géométralement. Dans le second, les X et les Z restent les mêmes, tandis que les Y se concluent immédiatement des distances connues des points de l'objet au plan de réflexion ; sur le tableau, chacun de ces points est situé verticalement au-dessus de son image.

Nous négligerons les épaisseurs des glaces, ou bien nous admettrons, pour être rigoureusement exact, que les données sur la position de leurs plans se rapportent à leurs faces internes, parce que la couche métallique qui s'y trouve appliquée représente, dans ces appareils, le véritable miroir.

Enfin, la perspective de toute image réfléchie par un miroir plan doit satisfaire à cette condition, que les droites menées par les divers points de l'objet et leurs images respectives concourent en un même point, parce qu'elles sont parallèles dans l'espace.

IMAGE D'UN PUPITRE DANS UNE GLACE. (*Fig.* 139.)

209. *Les deux faces inclinées du pupitre sont pleines et comprennent un angle* EAC *de* 60 *degrés ; leur longueur* AB = $0^m,46$, *leur largeur* AE *est de* $0^m,37$ : *les rebords tels que* EGFH *sont longs de* $0^m,06$. *On néglige les épaisseurs. La déclinaison de* AB = 4 : 1, *cette droite s'éloignant vers la gauche.*

*La glace* VV'U'U *est un rectangle vertical, large de* $1^m,3$, *haut de* $1^m,4$, *déclinant de* 45 *degrés et s'éloignant vers la droite, de* U *en* V. *On donne :*

$$A \begin{cases} X = 0^m,30 \\ Y = 0,45 \\ Z = 3,00 \end{cases} \qquad V \begin{cases} X = -0,5 \\ Y = -0,2 \\ Z = 4,9 \end{cases}$$

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Il ne serait peut-être pas facile de reconnaître, à la première inspection de ces données, si l'image est visible du

Digitized by Google

point de vue ; mais le doute cessera dans le cours de l'opération.

Nous déterminons les points principaux du pupitre, au moyen de ses projections sur un plan géométral dont le choix est arbitraire, et sur un plan vertical perpendiculaire à la longueur AB. La trace du plan du miroir étant construite dans le géométral, nous abaissons, des projections horizontales de ces points, des perpendiculaires à cette trace, en les prolongeant de longueurs égales à elles-mêmes, et nous obtenons les projections des points $A_1$, $B_1$, $C_1$,... , images de A, B, C,.... Les hauteurs verticales sont les mêmes pour ces deux groupes de points ; d'ailleurs, elles se concluent facilement de l'énoncé.

Cette construction étant effectuée, nous reconnaissons que les rayons visuels des points de l'image passent entre les limites du miroir, c'est-à-dire que l'image est visible.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | m | | | |
| B | X = | 0,188 | C | X = | 0,480 |
| | Z = | 4,466 | | Z = | 4,045 |
| M | X = | 0,530 | U | X = | −1,419 |
| | Z = | 4,058 | | Z = | 8,981 |
| $A_1$ | X = | −1,400 | $B_1$ | X = | −0,954 |
| | Z = | 5,700 | | Z = | 5,588 |
| $D_1$ | X = | −0,909 | $N_1$ | X = | −0,896 |
| | Z = | 5,768 | | Z = | 5,818. |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | mm | | | | | | |
| *a* | *x* = | 150 | *b* | *x* = | 85 | *c* | *x* = | 237 |
| | *y* = | 225 | | *y* = | 202 | | *y* = | 64 |
| *d* | *x* = | 164 | *e* | *x* = | 106 | *f* | *x* = | 45 |
| | *y* = | 53 | | *y* = | 65 | | *y* = | 59 |
| *g* | *x* = | 80 | *h* | *x* = | 22 | *m* | *x* = | 261 |
| | *y* = | 80 | | *y* = | 73 | | *y* = | 79. |

Digitized by Google

$$v \begin{cases} x = -205 \\ y = -82 \end{cases} \quad u \begin{cases} x = -713 \\ y = -100 \end{cases} \quad \begin{matrix} vv' = 571 \\ uu' = 703 \end{matrix}$$

$$a_1 \begin{cases} x = -491 \\ y = 158 \end{cases} \quad b_1 \begin{cases} x = -341 \\ y = 161 \end{cases} \quad c_1 \begin{cases} x = -461 \\ y = 44 \end{cases}$$

$$d_1 \begin{cases} x = -315 \\ y = 45 \end{cases} \quad e_1 \begin{cases} x = -515 \\ y = 46 \end{cases} \quad f_1 \begin{cases} x = -363 \\ y = 48 \end{cases}$$

$$g_1 \begin{cases} x = -515 \\ y = 57 \end{cases} \quad h_1 \begin{cases} x = -362 \\ y = 59 \end{cases} \quad n_1 \begin{cases} x = 308 \\ y = 55. \end{cases}$$

La perspective se construit immédiatement. Les droites fictives $aa_1$, $bb_1$, ... doivent se trouver dirigées vers le point de distance, à gauche, tandis que $ab$, $ef$, ... ont également leur point de concours vers la gauche, à 5 décimètres du centre perspectif.

LA TABLE RONDE DU N° 174, ET SON IMAGE DANS UNE GLACE.
(*Fig.* 140.)

**210.** *La position de la table par rapport aux plans coordonnés et la distance centrale sont les mêmes qu'au* n° **174.** *La glace* VV'U'U *est un rectangle vertical, large de* $1^m,2$, *haut de* $1^m,8$. *Sa déclinaison* $= 3 : 4$, *et elle s'approche vers la droite, de* V *en* U. *On donne :*

$$V \begin{cases} X = -0^m,24 \\ Y = -4,30 \\ Z = 3,78. \end{cases}$$

La position de l'image sera complétement déterminée dès que nous aurons le point $I_1$, centre du cercle supérieur, que nous construisons en conséquence. Supposant la table transportée dans cette position, nous lui appliquons le procédé du n° **174.** Ainsi, en ce qui concerne particulièrement la surface de révolution de son support, nous employons les mêmes plans sécants, pour lesquels Y égale

Digitized by Google

successivement — $1^m,26$, — $1^m,31$, — $1^m,36$ et — $1^m,41$, afin d'obtenir le contour apparent comme enveloppe perspective. Les points latéraux seront désignés respectivement, dans ces quatre sections, par $\nu$ et $\nu'$, $\pi$ et $\pi'$, $\rho$ et $\rho'$, $\sigma$ et $\sigma'$. Les points analogues dans les cercles supérieur et inférieur seront $\mu$ et $\mu'$, $\tau$ et $\tau'$; les culminants $m$ et $m'$, $t$ et $t'$.

La construction géométrale fait reconnaître, comme dans le problème précédent, que les rayons visuels de l'image passent dans les limites du miroir, et qu'elle est conséquemment visible du point de vue.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | X = 0,352 m<br>Z = 4,536 | U | X = 0,720<br>Z = 3,060 | $\mu$ | X = — 0,148<br>Z = 4,520 |
| $\mu'$ | X = 0,843<br>Z = 4,443 | $\nu$ | X = 0,272<br>Z = 4,541 | $\nu'$ | X = 0,432<br>Z = 4,528 |
| $\pi$ | X = 0,266<br>Z = 4,541 | $\pi'$ | X = 0,438<br>Z = 4,527 | $\rho$ | X = 0,245<br>Z = 4,542 |
| $\rho'$ | X = 0,458<br>Z = 4,525 | $\sigma$ | X = 0,204<br>Z = 4,543 | $\sigma'$ | X = 0,499<br>Z = 4,520. |
| $\tau$ | X = 0,072<br>Z = 4,540 | $\tau'$ | X = 0,629<br>Z = 4,497. | | |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i_1$ | $x$ = 155 mm<br>$y$ = — 353 | $\nu$ | $x$ = — 127<br>$y$ = — 688 | $u$ | $x$ = 470<br>$y$ = — 850 |
| | $\nu\nu'$ = 952<br>$uu'$ = 1176 | $\mu$ | $x$ = — 66<br>$y$ = — 354 | $\mu'$ | $x$ = 380<br>$y$ = — 360. |
| | $\mu\mu''$ = 18<br>$\mu'\mu'''$ = 18 | $m$ | $x$ = 174<br>$y$ = — 396 | | $mm'$ = 20. |
| $\nu$ | $x$ = 120<br>$y$ = — 555 | $\nu'$ | $x$ = 191<br>$y$ = — 557 | $\pi$ | $x$ = 117<br>$y$ = — 577. |

Digitized by Google

$$\pi' \begin{cases} x = & 194 \\ y = - & 579 \end{cases} \quad \rho \begin{cases} x = & 108 \\ y = - & 599 \end{cases} \quad \rho' \begin{cases} x = & 202 \\ y = - & 601 \end{cases}$$

$$\sigma \begin{cases} x = & 90 \\ y = - & 621 \end{cases} \quad \sigma' \begin{cases} x = & 221 \\ y = - & 624 \end{cases} \quad s \begin{cases} x = & 160 \\ y = - & 643 \end{cases}$$

$$\tau \begin{cases} x = & 32 \\ y = - & 643 \end{cases} \quad \tau' \begin{cases} x = & 280 \\ y = - & 649 \end{cases} \quad t \begin{cases} x = & 165 \\ y = - & 686 \end{cases}$$

$$\tau\tau'' = 36$$

$$tt' = 38.$$

La construction de la perspective ne donne lieu à aucune observation nouvelle.

IMAGES D'UNE PENDULE DANS DEUX GLACES. (*Fig.* 141.)

211. *Une pendule de la forme d'un parallélipipède rectangle a* $0^m,48$ *de hauteur sur* $0^m,36$ *de largeur et* $0^m,16$ *d'épaisseur. Le cadran a* $0^m,15$ *de rayon, et son centre* I *est élevé de* $0^m,3$ *au-dessus de la base. Sa face* ABFE *décline de* 60 *degrés, s'éloignant de gauche à droite.*

$$\mathrm{I} \begin{cases} X = - 0^m,7 \\ Y = - 1,3 \\ Z = 6,0. \end{cases}$$

*Deux glaces, hautes de* $2^m,4$, *s'appuyant sur le même plan horizontal que la pendule, déclinent symétriquement de* 60 *degrés, et leurs plans se coupent dans le plan normal. La première* VUU'V' *est parallèle à la face* ABFE, *et large de* $2^m,2$; *la position de la pendule correspond au milieu de cette largeur, et sa distance à la glace égale* $0^m,1$. *La seconde* STT'S' *est large de* $2^m,7$, *et le bord* TT' *est à* 5 *mètres du plan central.*

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Il résulte des données de l'énoncé que les glaces comprennent entre elles un angle de 60 degrés, et que les images de réflexions successives forment en conséquence,

Digitized by Google

avec la pendule, un arrangement régulier dans l'espace (61). Nous avons à déterminer toutes ces images, en tant qu'elles doivent être visibles : or, nous pourrions obtenir successivement chacune d'elles par le procédé employé précédemment pour les images d'une seule réflexion; mais nous conclurons plus simplement leurs positions des circonstances particulières du problème. Il est évident en effet, ou du moins on reconnaîtra par une construction géométrale, que les images $A_2B_2C_2\ldots, A_3B_3C_3\ldots$, de seconde et de troisième réflexion, ont leurs faces parallèles au tableau, et qu'elles sont aux mêmes distances de l'intersection OO′ des plans des miroirs que la pendule et sa première image. Les images de quatrième et de cinquième réflexion ont, en sens inverse, la même déclinaison que la pendule; elles forment avec elle et la première image un système symétrique, relativement à un plan parallèle au tableau, passant par OO′. Ce dernier plan contient les images de première réflexion des deux miroirs, ou de leurs cadres; l'image de seconde réflexion du premier miroir est dans le plan du second, et réciproquement. Un point quelconque, tel que V, pris dans le plan d'un miroir, est à la même distance du point O que ses images successives $V_1$ et $V_2$.

Nous reconnaîtrons, par la construction géométrale ou celle de la perspective, que toutes les images de la pendule sont visibles, de même que $U_1U'_1$ et $S_1S'_1$, $V_2V'_2$ et $T_2T'_2$.

Les points de la circonférence du cadran seront désignés par 12 heures, 11 heures, etc. Ces points sont visibles dans l'image de quatrième réflexion, où nous les contruirons simplement par analogie. $R_2$ est le rayon du cadran de deuxième réflexion.

*Résultat géométral.*

$$A \begin{cases} X = -0^{m},790 \\ Z = \phantom{-}5,844 \end{cases} \qquad D \begin{cases} X = -0,929 \\ Z = \phantom{-}5,924 \end{cases}$$

Digitized by Google

| | | | |
|---|---|---|---|
| $11^h$ | X = −0,737<br>Y = −1,170<br>Z = 5,962 | $10^h$ | X = −0,765<br>Y = −1,225<br>Z = 5,887 |
| $9^h$ | X = −0,775<br>Z = 5,870 | $A_1$ | X = −1,240<br>Z = 6,104 |
| $A_2$ | X = 2,180<br>Z = 7,472 | O | X = 0,000<br>Z = 7,732 |
| $A_4$ | X = −1,240<br>Z = 9,360 | V | X = −1,475<br>Z = 5,177 |
| U | X = −0,375<br>Z = 7,083 | T | X = 1,576<br>Z = 5,000 |
| S | X = 0,227<br>Z = 7,038 | $U_1$ | X = 0,750<br>Z = 7,732 |
| $S_1$ | X = −0,455<br>Z = 7,732. | | |

***Résultat perspectif.***

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | mm | | | | |
| $a$ | $x = -270$<br>$y = -383$ | $b$ | $x = -198$<br>$y = -363$ | $c$ | $x = -240$<br>$y = -359$ |
| $d$ | $x = -312$<br>$y = -378$ | | $ae = 164$<br>$bf = 156$ | $12^h$ | $x = -233$<br>$y = -383$ |
| $11^h$ | $x = -246$<br>$y = -392$ | $10^h$ | $x = -260$<br>$y = -416$ | $9^h$ | $x = -264$<br>$y = -443$ |
| $1^h$ | $x = -219$<br>$y = -300$ | $2^h$ | $x = -208$<br>$y = -401$ | $3^h$ | $x = -204$<br>$y = -424$ |
| $a_1$ | $x = -406$<br>$y = -367$ | $b_1$ | $x = -331$<br>$y = -349$ | $c_1$ | $x = -291$<br>$y = -354$ |
| $d_1$ | $x = -366$<br>$y = -372$ | | $a_1e_1 = 157$<br>$c_1g_1 = 152$ | $a_2$ | $x = 584$<br>$y = -300$ |
| | $a_2b_2 = 97$<br>$a_2e_2 = 128$ | $i_2$ | $x = 535$<br>$y = -348$ | | $r_2 = 40$ |

Digitized by Google

$a_3 \begin{cases} x = 549 \\ y = -280 \end{cases}$ $a_4 \begin{cases} x = -265 \\ y = -239 \end{cases}$ $b_4 \begin{cases} x = -234 \\ y = -248 \end{cases}$

$c_4 \begin{cases} x = -202 \\ y = -245 \end{cases}$ $d_4 \begin{cases} x = -233 \\ y = -237 \end{cases}$ $a_4e_4 = 103$ $b_4f_4 = 106$

$a_5 \begin{cases} x = -164 \\ y = -233 \end{cases}$ $b_5 \begin{cases} x = -131 \\ y = -241 \end{cases}$ $c_5 \begin{cases} x = -162 \\ y = -243 \end{cases}$

$d_5 \begin{cases} x = -195 \\ y = -235 \end{cases}$ $b_5f_5 = 103$ $d_5h_5 = 101$ $v \begin{cases} x = -570 \\ y = -618 \end{cases}$

$u \begin{cases} x = -106 \\ y = -452 \end{cases}$ $t \begin{cases} x = 630 \\ y = -640 \end{cases}$ $s \begin{cases} x = 65 \\ y = -455 \end{cases}$

$vv' = 927$ $tt' = 960$ $u_1 \begin{cases} x = 194 \\ y = -414 \end{cases}$

$uu' = 678$ $ss' = 682$

$s_1 \begin{cases} x = -118 \\ y = -414 \end{cases}$ $v_2 \begin{cases} x = -287 \\ y = -311 \end{cases}$ $t_2 \begin{cases} x = 301 \\ y = -307. \end{cases}$

La construction de la perspective est immédiate, du moins à l'égard de la pendule et de ses images. Relativement aux miroirs, nous observons que les plans de leurs images, aussi bien que leurs propres plans, se coupent suivant la verticale OO′, déterminée en perspective par les rencontres de $vu$ et $ts$, de $v'u'$ et $t's'$ ; les bords horizontaux de tous les cadres, prolongés suffisamment, doivent donc se rencontrer en O et O′, et nous traçons leurs images d'après cette condition ; d'ailleurs, celles qui passent par $s_1$ et $s'_1$, $u_1$ et $u'_1$, doivent être parallèles à la ligne d'horizon.

Si l'opération est exacte, les points tels que $a$ et $a_5$, $b$ et $b_5$, ..., $a_2$ et $a_4$, $b_2$ et $b_4$, ... se trouveront situés en lignes droites avec le centre perspectif, de même que $v$ et $v_2$, $t$ et $t_2$, $v'$ et $v'_2$, $t'$ et $t'_2$.

Dans l'espace, la pendule compose avec ses cinq images un assemblage régulier autour de la verticale OO′. Si elle était placée à égale distance des deux miroirs, sur l'axe de perspective, l'assemblage deviendrait symétrique sur le

Digitized by Google

tableau et réaliserait l'effet du kaléidoscope (61); mais, pour rendre toutes les images visibles, il faudrait prolonger les glaces jusqu'à l'intersection de leurs plans. On peut s'exercer à résoudre le problème dans ces nouvelles données.

L'ÉDIFICE DU N° 129 ET SON IMAGE DANS UNE EAU TRANQUILLE.
(*Fig.* 142.)

212. *L'édifice avec pavillon du* n° 129, page 172, *est transporté parallèlement à lui-même, dans une position telle, que l'on a*

$$A \begin{cases} X = -\ 32^{m}, \\ Y = -\ 6, \\ Z = \ 120. \end{cases}$$

*Un quai est parallèle à la façade; son bord* TU *en est distant de* 60 *mètres, et le niveau de l'eau est à* 1 *mètre au-dessous du sol. Le mur est vertical.*

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Les coordonnées aériennes des divers points de l'édifice seront supposées connues, parce qu'elles peuvent se conclure immédiatement de celles du numéro précité : les unes et les autres, en effet, ne diffèrent respectivement que de quantités égales, d'après la transposition de l'édifice. Pour fixer la position du bord du quai, nous en prenons le point U dans le prolongement de DA, et le point T situé à 40 mètres du précédent, vers la gauche. Les coordonnées X et Z de ces derniers points sont faciles à calculer, si l'on observe que la déclinaison des lignes est de 45 degrés; mais on peut les déterminer géométralement.

Le plan du miroir passant à 1 mètre au-dessous du sol, c'est-à-dire à 7 mètres au-dessous du plan d'horizon, on voit que l'image du point A sera située à 8 mètres au-dessous de ce plan; par suite, celle de A′ le sera à 28 mètres;

Digitized by Google

celles de E, M, I, le seront respectivement à $29^m,67$, à 33 mètres et à $42^m,40$ au-dessous du même plan.

*Résultat géométral.*

$$U \begin{cases} X = 9^m,57 \\ Z = 77,57 \end{cases} \qquad T \begin{cases} X = 18,70 \\ Z = 49,29. \end{cases}$$

*Résultat perspectif.*

| | | |
|---|---|---|
| $a \begin{cases} x = -800^{mm} \\ y = -150 \end{cases}$ | $b \begin{cases} x = -75 \\ y = -121 \end{cases}$ | $d \begin{cases} x = -1011 \\ y = -136 \end{cases}$ |
| $m \begin{cases} x = -911 \\ y = 451 \end{cases}$ | $n \begin{cases} x = -496 \\ y = 369 \end{cases}$ | $p \begin{cases} x = -627 \\ y = 419 \end{cases}$ |
| $e \begin{cases} x = -550 \\ y = 356 \end{cases}$ | $f \begin{cases} x = -338 \\ y = 335 \end{cases}$ | $i \begin{cases} x = -517 \\ y = 606 \end{cases}$ |
| $aa' = 500$ | $dd' = 452$ | $ff' = 135$ |
| $bb' = 406$ | $ce' = 144$ | |
| $u \begin{cases} x = 370 \\ y = -232 \end{cases}$ | $t \begin{cases} x = -1138 \\ y = -365 \end{cases}$ | $uu_1 = 77$ |
| | | $tt_1 = 122$ |
| $a'_1 \{ y = -700$ | $b'_1 \{ y = -566$ | $d'_1 \{ y = -633$ |
| $m_1 \{ y = -783$ | $n_1 \{ y = -640$ | $p_1 \{ y = -727$ |
| $e_1 \{ y = -674$ | $f_1 \{ y = -634$ | $i_1 \{ y = -906.$ |

Nous construisons immédiatement la perspective, en observant que l'image de l'édifice est visible seulement au-dessous de la droite $u_1 t_1$, qui représente l'image du bord du quai. Une droite menée par les milieux des verticales $uu_1$, $tt_1$, est sur le mur la ligne à fleur d'eau.

Digitized by Google

## DE QUELQUES ANCIENNES MÉTHODES DE PERSPECTIVE.

213. La propriété des points de concours et quelques autres principes fondamentaux de la perspective linéaire, ont fait imaginer autrefois diverses méthodes empiriques, particulièrement celles qu'on désigne et qu'on pratique encore aujourd'hui sous les noms du *treillis* et du *châssis perspectif*. Dans l'application de ces méthodes on employait aussi, pour la mise en perspective des points donnés de position dans l'espace, un procédé qu'il peut sembler intéressant de connaître, du moins comme une sorte d'élément historique de l'origine de la science, car l'utilité réelle en devait être très-bornée. Voici à quoi il se réduisait.

Soient (*fig.* 143) $x'x$ et $y'y$ les droites que nous nommons les *axes des coordonnées perspectives;* B la projection d'un point donné dans l'espace, sur le plan du tableau; BC la distance du même point au même plan, cette distance étant portée sur l'horizontale menée par le point B, vers la droite; K le point de distance vers la gauche, et V le centre perspectif. Les deux diagonales CK, BV donneront par leur intersection le point $a$, perspective de celui de l'espace : car il est évident que BV et CK représentent les perspectives de deux droites se croisant par ce dernier point, la première perpendiculaire au tableau, et la seconde déclinant de 45 degrés; mais le point $a$, rencontre de ces diagonales, doit être la perspective du point où elles se rencontrent dans l'espace (14), c'est-à-dire celle du point donné.

Si l'on avait porté la distance BC vers la gauche du point B, on aurait dû prendre le point de distance vers la droite.

Cette construction, qu'on démontrait différemment à l'aide de proportions, plaît au premier abord par sa simplicité ; mais elle a l'inconvénient de devenir impraticable pour tout point qui n'est pas extrêmement rapproché de

Digitized by Google

l'axe de perspective et du plan du tableau, puisque sa projection B et sa distance BC doivent tomber dans les limites de cette surface ou du prolongement matériel dont elle est susceptible ; le point de distance doit aussi se trouver dans les mêmes limites. Nous n'en ferons en conséquence aucun usage, et, dans ce qui suit, les points de l'espace seront mis en perspective par nos procédés ordinaires.

*Méthode du treillis.* La méthode du treillis suppose les objets dont on cherche la perspective situés dans un même plan, qui est ordinairement horizontal, ou du moins s'appuyant par leurs bases sur un tel plan. Si l'on ne considère d'abord que des lignes dans un plan horizontal, on les conçoit recouvertes par un réseau de carrés s'alignant parallèlement au tableau, et dont on fixe d'ailleurs arbitrairement la position : les carrés doivent être d'autant plus nombreux et plus petits que l'on veut opérer avec plus d'exactitude. On décrit ce réseau sur l'épure, en même temps que le système de lignes dont il s'agit, et l'on construit sur le tableau le réseau des trapèzes correspondants. On obtient ensuite la perspective d'un point quelconque, en examinant quelle est sa position dans le carré qui le contient, et déterminant à vue d'œil, dans le trapèze de même rang, le point qui correspond au premier.

La méthode est d'une exécution facile, et se rapporte principalement au n° 117; elle a beaucoup d'analogie avec celle dont nous avons apprécié l'usage dans la copie d'après nature (91), consistant dans l'emploi d'un châssis à fils rectangulaires. Alors c'était la surface du tableau que nous décomposions en carrés, et, si le terrain avait été supposé horizontal, il se serait trouvé décomposé en trapèzes. Il y aurait ainsi, dans ce cas, inversion entre les deux modes de décomposition, qui rentreraient l'un dans l'autre par la permutation du plan du tableau avec celui du terrain : c'est en définitive la même idée fondamentale.

Digitized by Google

Si la surface plane était parallèle au plan normal, la manière d'opérer ne changerait pas; si elle était verticale, avec une déclinaison quelconque, on construirait encore, sans beaucoup plus de difficulté, la perspective du réseau des carrés, par une division perspective des lignes horizontales de l'espace, et l'on ferait toujours le même usage du résultat.

Le treillis est fréquemment employé pour la mise en perspective des dessins dont on veut orner un plafond, un parquet ou un parement de muraille. Dans ces sortes d'applications, on détermine immédiatement la position sur la toile d'autant de points qu'on en veut considérer sur l'épure, et le réseau des trapèzes dirige encore le crayon de l'artiste qui relie ces points par des contours gracieux. On en verra un exemple ci-après.

Nous venons de considérer des lignes situées dans une surface plane; mais on comprend déjà comment la méthode peut s'étendre à des objets quelconques, qui s'appuient sur un même plan, pourvu qu'on s'attache uniquement à déterminer en dehors de leurs bases les dimensions parallèles au tableau, par exemple des hauteurs verticales. Après avoir obtenu sur la toile, conformément à ce qui précède, les points principaux de leurs bases, que nous supposerons horizontales dans l'espace, on élève les verticales qui passent par ces points, et on donne à chacune une longueur telle, qu'il y ait sensiblement proportion entre la verticale de l'espace, celle du tableau, la largeur d'un carré de l'espace et la largeur du trapèze au pied de la verticale sur le tableau. C'est ainsi que pour représenter un prisme pentagonal (*fig.* 144), nous déterminons d'abord les points $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, qui représentent les sommets de sa base, d'après la position de ceux-ci dans le réseau des carrés; puis, nous élevons les verticales $aa'$, $bb'$, $cc'$, telles que, pour la première par exemple, si la hauteur du prisme est double de la largeur d'un carré, $aa'$ soit double aussi de la largeur $gah$ du trapèze.

Digitized by Google

Voici un exemple numérique (*fig.* 145) :

*Soit à mettre en perspective une rosace de parquet, dont le plus grand rayon égale* $0^m,6$, *et dont le centre* I *a cette position :*

$$I \begin{cases} X = 0,0^m \\ Y = -1,6 \\ Z = 4,0. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 1 *mètre.*

Le point I est le seul dont nous déterminerons directement la perspective, parce qu'elle suffira pour fixer sur le tableau la position de la rosace. Sur le dessin géométral, nous décrivons un grand carré MNKL, dont chaque côté égale $1^m,2$, de sorte qu'il enveloppe exactement la figure. Nous divisons les côtés seulement en huit parties et tirons les transversales, d'où résultent soixante-quatre carrés que nous mettons en perspective : à cet effet, nous savons (117) qu'il suffit de construire les points $m$, $n$, $l$, et d'exécuter les divisions des lignes $mn$ et $ml$. Nous trouvons ainsi :

$$i \begin{cases} x = 000^{mm} \\ y = -400 \end{cases} \quad m \begin{cases} x = -250 \\ y = -500 \end{cases} \quad l \begin{cases} x = -167 \\ y = -333. \end{cases}$$

Le réseau des trapèzes étant construit, nous y distribuons les points qu'il nous plaît de considérer particulièrement sur la rosace, dont nous traçons ensuite les contours.

*Méthode du châssis perspectif.* — La méthode du châssis suppose les objets placés sur un même plan horizontal, mais leurs positions déterminées par ces deux conditions : 1° la distance de chaque point au plan central ; 2° l'angle que forme avec le plan normal la projection horizontale de chaque rayon visuel.

Concevons une série de plans équidistants, parallèles au



Digitized by Google

tableau, et une autre série de plans verticaux, se croisant par le point de vue sous des angles égaux: Ces plans décomposeront la surface du terrain en un certain réseau de quadrilatères. Or, la méthode revient à mettre ces quadrilatères en perspective pour s'en servir comme des carrés, dans la méthode du treillis. Elle peut se pratiquer ainsi (*fig.* 146):

D'abord, les horizontales *ab*, *cd*, *ef*,..., qui limitent sur le tableau les zones de l'espace, s'obtiennent, ainsi que dans le treillis, par une division perspective d'une longueur perpendiculaire au plan central. Ensuite, soit V le centre perspectif: sur la ligne normale $yy'$ prenons VO égale à la distance centrale; du point O, comme centre, décrivons l'arc indéfini HVG; prenons sur sa graduation des parties égales à celles que doivent comprendre entre eux les plans verticaux de la seconde série, par exemple des arcs de 5 degrés; prolongeons les rayons menés aux points de division jusqu'à la rencontre de la ligne d'horizon, où nous marquons 5, 10, 15 degrés,..., tant à gauche qu'à droite; enfin, des points de rencontre abaissons des verticales: elles détermineront avec les horizontales ci-dessus la perspective du réseau de quadrilatères.

En effet, si l'on relève dans une position horizontale le plan du cercle HVG, par un mouvement autour de $xx'$, on comprend que les verticales représentent les intersections des plans verticaux avec le plan du tableau, et sont en conséquence les perspectives des droites suivant lesquelles ces plans coupent le terrain.

Les quadrilatères dans lesquels nous avons décomposé la surface horizontale sont des trapèzes qui se transforment en rectangles sur le tableau, tels que *pqrs*. Un sommet, tel que *p*, représente le point du terrain situé sur la limite de la seconde zone, et dans le plan qui s'écarte de 15 degrés du plan normal vers la droite.

La méthode du châssis peut être employée avec avantage

Digitized by Google

dans quelques circonstances assez rares, qui dépendent de la nature des données d'un problème; mais elle est généralement peu utile, et on doit lui préférer celle du treillis.

---

## DES SIMPLIFICATIONS A INTRODUIRE DANS LES APPLICATIONS PRATIQUES.

214. La plupart des objets dont nous nous sommes proposé la mise en perspective se trouvaient réduits à un état de simplicité qui se rencontre rarement dans la pratique. Ainsi, les façades de nos édifices étaient dépouillées de leurs corniches, pilastres et autres ornements qui pouvaient entrer dans leur architecture : souvent, nous avons substitué des lignes et des surfaces mathématiques à des tiges et des parois matérielles d'une épaisseur plus ou moins appréciable. Il est vrai que, les problèmes une fois posés, nous les avons résolus avec toute l'exactitude qu'ils comportaient, sans omission du moindre de leurs éléments spécifiés; et ce degré d'exactitude dans les solutions numériques nous a procuré quelquefois d'intéressantes vérifications des propriétés de la théorie.

Mais si nous nous sommes placé dans ces conditions simples et idéales, cela nous était permis pour deux raisons. D'abord, il nous eût été facile de tenir compte de tous les détails dont nous nous sommes affranchi, avec la seule peine d'étendre les opérations à un plus grand nombre de lignes ou de surfaces, supposées toutefois de la nature de celles qui sont susceptibles d'être traitées géométriquement. D'un autre côté, l'application rigoureuse de ces procédés a ses limites, subordonnées à l'importance des objets ou de leurs diverses parties dans le sujet de la composition, à l'apparence nettement accusée ou vague et indécise de leur figure, et fixées en conséquence par le discernement du praticien.



Digitized by Google

Les opérations de la perspective linéaire, tout indispensables qu'elles sont, ne constituent qu'un travail préalable dans l'exécution d'une œuvre de peinture; et, si tous les détails devaient indistinctement y être déterminés par les méthodes de la science, ils absorberaient un temps considérable, toujours précieux pour l'artiste. Cette minutieuse exactitude, inutile dans le fait, semblerait en outre inconséquente, parce qu'il se trouve, même dans les parties les plus importantes de la composition, des objets dont les formes ont un caractère déterminé et ne peuvent néanmoins être géométriquement définies. Tels sont des rosaces, des festons de bas-reliefs, les décorations d'une frise, et notamment les personnages mis en action sur la scène du tableau. On conçoit donc la légitimité de nombreuses simplifications dans les procédés géométriques, et même la nécessité de les réduire, dans certains cas, à des méthodes d'approximation très-imparfaites; à cet égard, il serait difficile de fixer des règles invariables : voici du moins quelques préceptes qui semblent dictés par le bon sens.

Les opérations géométriques doivent être supprimées pour tous les détails qui peuvent être convenablement placés sur la toile, sans autre guide que la grandeur et la position des objets auxquels ils se rattachent dans l'espace. Les petites lignes qui se remarquent dans ces détails seront comparées avec les lignes de positions plus ou moins analogues obtenues exactement. Un examen attentif des conditions du problème et l'application des principes généraux de la théorie seront souvent nécessaires.

Elles peuvent être simplifiées pour les objets qui atteignent un certain éloignement. Dans ce cas, il est toujours utile de construire avec précision les points les plus remarquables, et quant aux autres, on peut se borner à des approximations. Le contour apparent de chaque objet en particulier, s'il a peu d'étendue relativement à sa distance,

Digitized by Google

sera remplacé par sa projection sur un plan perpendiculaire aux rayons visuels, et conçu à cette même distance : on obtient ainsi des perspectives *à vol d'oiseau*, qui supposent infinies les distances au point de vue. Une surface de révolution ayant son axe vertical se réduira donc à une section méridienne. La simplification pour une telle surface sera plus grande encore, si elle s'écarte peu de l'axe de perspective, puisque la section méridienne deviendra parallèle au tableau.

Si les objets s'éloignent davantage, il pourra suffire de calculer la position, sur la toile, d'un point de chacun d'eux, et leurs grandeurs perspectives dans le sens vertical ou horizontal : on les dessinera ensuite, dans ces dimensions, avec le vague qui caractérise les lointains.

Toutefois, en réduisant les opérations de l'épure, je conseille de réserver peu de constructions à effectuer sur la toile par la propriété des points de concours ou tout autre, quand elles ne seront pas d'une extrême simplicité. La détermination directe des points conduit aussi vite et plus sûrement au but. J'ajouterai une seconde observation, qui n'est pas sans utilité pour la pratique : il nous est souvent arrivé de rapporter les uns aux autres plusieurs points situés sur une même ordonnée, afin de présenter les résultats perspectifs dans un cadre un peu plus restreint ; mais il vaut mieux les rapporter tous immédiatement aux deux axes du tableau, puisqu'on évite ainsi l'accumulation des erreurs graphiques.

Les méthodes de calcul, substituées aux constructions géométrales ou combinées avec elles, fourniraient encore de puissants moyens de simplification. Un opérateur quelque peu familiarisé avec la géométrie analytique trouvera souvent de grands avantages à déterminer par cette nouvelle voie les valeurs des coordonnées aériennes, d'autant plus qu'il pourra toujours former une disposition des objets con-

Digitized by Google

forme à l'idée qu'il aura conçue, en représentant par des nombres ronds la plupart des éléments primitifs du calcul, comme nous le supposons ordinairement dans nos problèmes.

Ces préceptes, d'une application générale, pourraient se subdiviser d'après les divers ordres d'ouvrages de peinture; mais, comme ils ressortent de la nature même des choses, je dirai peu de mots à cet égard.

Une vue de monument, figurant sur le premier plan d'un tableau, exige au plus haut degré l'emploi des méthodes exactes, parce que toutes les lignes, dans un tel objet, sont éminemment géométriques et subordonnées à une symétrie qui nous rendrait plus sensibles aux défauts de la perspective. On construira d'abord la projection géométrale de toute la partie visible, et l'on obtiendra les hauteurs de ses points principaux en les projetant sur deux plans verticaux, dont un soit parallèle et l'autre perpendiculaire à la façade, ce qui donnera l'*élévation* et la *coupe*. Il sera quelquefois possible de conclure immédiatement ces hauteurs des dimensions attribuées à l'édifice et des lois particulières de son architecture. Mais les contours apparents des surfaces courbes nécessitent des constructions spéciales et généralement une plus forte réduction des grandeurs de l'espace ; on pourra les effectuer à part.

Si l'on a conçu une vue champêtre, l'opération peut encore s'appliquer à un grand nombre de points, mais elle est très-facile. On exécutera sur une vaste feuille la projection géométrale de l'ensemble des objets; on se donnera ensuite les hauteurs verticales, en les estimant d'après les inclinaisons et les divers accidents du terrain, tels qu'on se les représente. Comme il ne s'agit que de résultats approximatifs, les petites erreurs commises dans ces évaluations seront assez indifférentes. A la vérité, les *fabriques*, puisqu'on nomme ainsi dans le paysage tout ce qui est édifice,

Digitized by Google

pourront donner lieu à quelques opérations particulières, selon leur importance.

Les tableaux d'intérieurs réclament des soins minutieux, quand les détails des objets ne se dérobent pas dans les ombres ou les demi-teintes, et qu'ils ont une étendue ou des formes géométriques plus ou moins appréciables. On traitera toutes les parties dans leur ensemble, d'après les méthodes établies, ou l'on fera plusieurs épures si on le juge convenable. Une circonstance particulière à ces ouvrages les fait dépendre plus essentiellement des procédés de la composition : le point de vue est presque toujours placé en dehors de la chambre où est supposé le sujet du tableau, et l'on ne s'embarrasse nullement du pan de muraille qui rendrait les objets invisibles par son interposition entre eux et le spectateur. Il est d'ailleurs convenu que l'enlèvement fictif de la muraille laisse intacte la distribution des ombres et des lumières. De là résulterait véritablement l'impossibilité de réaliser les conditions de la perspective, quels que fussent les moyens matériels dont on pût disposer, et le peintre qui, dans ces conditions, veut reproduire d'après nature une scène d'intérieur, est lui-même, à la rigueur, obligé d'opérer comme si son modèle était idéal. Cette conséquence devient encore plus manifeste, lorsque, d'après les dimensions de la toile combinées avec la distance centrale, le champ perspectif embrasse la totalité de l'espace de la chambre. Mais, on ne doit pas se le dissimuler, le secours du modèle serait ici presque indispensable pour la fidèle représentation de certains effets de perspective aérienne.

Il nous reste à considérer la nombreuse catégorie des objets dont les surfaces échappent à l'exactitude des opérations de la géométrie. Ils se recommandent particulièrement à notre attention, lorsqu'ils reçoivent un caractère quelconque de beauté de ces formes élégantes dont nous

Digitized by Google

avons un sentiment intime, sans que nous puissions les définir. On leur appliquera encore, mais seulement d'une manière approximative et sur une large échelle, ce qui vient d'être dit pour les surfaces définies, et cela est toujours praticable. Afin de mieux fixer nos idées à cet égard, nous prendrons pour exemple un chapiteau de colonne de l'ordre corinthien. Si nous nous attachons à faire l'analyse de sa figure, nous y distinguerons un certain groupe de surfaces diversement contournées, des galbes, des feuilles, des volutes, dont l'harmonieux accord nous porte à penser que, dans la conception de leur ensemble, aussi bien que de leurs détails, rien n'est laissé à l'arbitraire; et cependant nous chercherions vainement à découvrir une loi géométrique de leur génération. Or, dès l'instant où cette figure porte en elle-même l'empreinte d'un type déterminé, il doit être possible d'évaluer, à l'aide de données empiriques ou de procédés quelconques, les rapports de grandeur et de position de leurs parties les plus essentielles ou les plus remarquables, et l'on trouvera ensuite, dans ces rapports, le moyen de mesurer les coordonnées aériennes, d'un plus ou moins grand nombre de points principaux : leurs perspectives étant obtenues, on en fera les sommets d'un canevas dans lequel se placeront ensuite les points secondaires et les détails. Une telle manière d'opérer dispenserait de recourir au modèle d'après nature, suivant l'usage des peintres pour ces sortes d'objets.

La même méthode est susceptible de s'étendre aux personnages du tableau, et peut-être en apprécierait-on les avantages pour les *raccourcis*, ce redoutable écueil de la composition religieuse ou historique. Étant données, d'une part, les proportions du corps humain, et, d'autre part, l'attitude qui convient à chaque personnage, on évaluerait approximativement par une construction géométrale ou le calcul les coordonnées des points les plus saillants, d'après

Digitized by Google

la structure et la pose des membres, et l'on rattacherait à ces points la perspective cherchée.

Reconnaissons cependant que, s'il est possible d'obtenir de la sorte des indications sommaires générales, ici se borne à peu près le secours que l'art peut emprunter à la science géométrique dans ces parties spéciales de la composition. Le contour et le modelé des carnations veulent une touche plus libre, dirigée sans doute par la théorie, mais, si je puis le dire, dégagée de ses entraves. Ils supposent, indépendamment des connaissances anatomiques, une longue suites d'observations, et parfois de puissantes facultés intuitives, une organisation que la nature n'a pas également départie à tous les imitateurs de Michel-Ange et de Véronèse. Il est aussi de ces ouvrages où doit se refléter une pensée poétique, un sentiment profond de l'idéal et du beau; et le contour, tracé par une main de maître, puise sa force ou son charme prestigieux dans la spontanéité même de l'inspiration. Décrit plus méthodiquement, il ne saurait avoir autant de grâce, ni surtout autant de vie. Mais nous touchons à la région sublime de l'art; elle est au-dessus de notre sujet.

En résumé, les principes et les méthodes de la perspective linéaire reçoivent plus ou moins de développement dans leurs applications pratiques, selon des circonstances dont un opérateur expérimenté doit être le seul juge; mais il est permis de conclure, d'une manière générale, qu'elles ont suffisamment rempli leur destination dans l'esquisse d'un sujet de tableau, quand elles en ont posé les bases avec certitude, et en quelque sorte édifié la charpente. Pour l'exécution de chaque ouvrage de ce genre, une part doit être faite à la science, et une autre au talent, sinon au génie de l'artiste.

Je vais maintenant essayer de prendre des exemples numériques dans quelques sujets de composition.

Digitized by Google

UN ÉDIFICE AVEC POURTOUR EN ARCADES ET COLONNES DE L'ORDRE DORIQUE. (*Fig.* 147.)

215. *Le corps principal de l'édifice est une rotonde d'un rayon de* 23 *mètres; il est surmonté d'un pavillon à base circulaire, et entourée d'une galerie ayant au dehors trente-deux arcades, supportées par autant de colonnes de l'ordre dorique romain. Le rayon de la base du pavillon égale* 3 *mètres, et celui de la galerie, jusqu'aux axes des colonnes,* 28 *mètres. Le toit supérieur est un cône haut de* 2 *mètres, dont le sommet* I *est élevé de* 40 *mètres au-dessus du sol; la hauteur* $\gamma\gamma'$ *du mur au-dessous égale* 3 *mètres; la hauteur* $\alpha'\alpha''$ *de la partie visible du mur de la rotonde au-dessus du second toit,* 14 *mètres, et la hauteur totale* $\alpha\alpha''$ *de ce mur,* 28 *mètres; celle de la galerie, jusqu'au bord du toit, est de* $12^m,5$. *Le module des colonnes égale* $0^m,5$, *et la corniche du toit au-dessus est celle de l'ordre. Les arcades s'appuient sur les tailloirs des chapiteaux, et leurs parements s'alignent sur le fût, comme la frise dans l'entablement de l'ordre complet.*

*Il y a huit portes cintrées, hautes de* 8 *mètres et larges de* 4 *mètres; une d'elles fait face au spectateur. Des fenêtres, de mêmes dimensions que les portes et de positions analogues, sont distribuées à la hauteur de* 17 *mètres au-dessus du sol. L'édifice s'élève sur un soubassement dont le rayon égale* 29 *mètres, et la hauteur* $0^m,8$. *On donne*

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l} X = -\ 40^m, \\ Y = \ \ 16, \\ Z = \ 160. \end{array}\right.$$

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

Ces données seraient fort incomplètes, s'il s'agissait de

Digitized by Google

déterminer exactement toutes les parties de l'édifice; mais elles peuvent être jugées suffisantes pour celles qui, d'après leurs distances au point de vue, seront visibles plus ou moins distinctement, beaucoup de menus détails devant être subordonnés à l'expérience ou au goût arbitraire du peintre. D'ailleurs, elles contiennent implicitement quelques autres éléments du problème, tels que la hauteur des colonnes, égale à 8 mètres, d'après la valeur du module; l'amplitude des arcades, dont la base ou le diamètre intérieur est $4^m,63$; l'épaisseur de leurs parements, de $0^m,417$; les inclinaisons et les hauteurs des toits. La largeur des portes étant supposée de 4 mètres, le rayon du cintre égale 2 mètres, et la hauteur des jambages, 6 mètres. Mais nous trouverons que cette largeur correspond, d'une manière sensible, à l'intervalle de deux plinthes, comme si les faces latérales des plinthes convergeaient vers l'axe de l'édifice, et nous ferons usage de cette remarque pour la construction. En conséquence, nous ferons dépendre la perspective cherchée des valeurs ci-après, qui seront seules déterminées directement, savoir :

Les arêtes de contour apparent des surfaces cylindriques de la rotonde, du pavillon et du soubassement, désignées par $\alpha\alpha'\alpha''$ et $\beta\beta'\beta''$, $\gamma\gamma'$ et $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$ et $\varphi\varphi'$, auxquelles il sera facile de joindre, si on le juge convenable, quelques points des circonférences des bases; les axes des colonnes visibles, ou du moins leurs extrémités inférieures G, $G_1$, $G_2$, ..., à partir de l'entrée de face; sur les contours extérieurs des arcades, les points les plus élevés M, $M_1$, $M_2$, ..., et les plus bas A et B, $A_1$ et $B_1$, $A_2$ et $B_2$, ..., en tenant compte de la double courbure des arcs. En outre, nous prendrons vers la droite deux colonnes, celles dont les axes aboutissent en G et $G_4$, dont nous construirons avec précision quelques détails, notamment les plinthes RST, $V_4R_4T_4$, et les fûts tels que $\theta\theta'$, $\lambda\lambda'$. Les arêtes de contour apparent

Digitized by Google

de la seconde pourront être supposées dans la section méridienne parallèle au tableau. Ces deux colonnes serviront de termes de comparaison pour construire les autres.

Les coordonnées aériennes des points à gauche se concluent de celles des points à droite; mais on peut aussi construire sur le tableau les uns au moyen des autres, en construisant d'abord, pour chaque groupe de points situés sur un même cercle horizontal, la droite qui est dans l'espace leur axe de symétrie. Les ordonnées X et Z des colonnes, au delà de la quatrième vers la droite, peuvent d'ailleurs se déduire, par un calcul facile, de celles des colonnes en deçà. Toutes les ordonnées Y sont connues, les élévations des points M, $M_1$, $M_2$,..., au-dessus du plan supérieur des chapiteaux, étant égales au demi-diamètre intérieur des bases, dont la valeur est déjà énoncée.

*Résultat géométral.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | X = — 61,32 m<br>Z = 151,36 | $\beta$ | X = — 17,13<br>Z = 162,41 |
| $\gamma$ | X = — 44,81<br>Z = 158,64 | $\delta$ | X = — 35,11<br>Z = 161,06 |
| $\varepsilon$ | X = — 66,46<br>Z = 148,13 | $\varphi$ | X = — 11,07<br>Z = 161,98 |
| G | X = — 37,26<br>Z = 132,13 | $G_1$ | X = — 31,87<br>Z = 133,20 |
| $G_2$ | X = — 26,80<br>Z = 135,31 | $G_3$ | X = — 22,24<br>Z = 138,36 |
| $G_4$ | X = — 18,36<br>Z = 142,24 | M | X = — 40,00<br>Z = 131,58 |
| $M_1$ | X = — 34,46<br>Z = 132,13 | $M_2$ | X = — 29,12<br>Z = 133,75 |

Digitized by Google

| | | | |
|---|---|---|---|
| $M_3$ | $X = -24,21$<br>$Z = 136,37$ | $M_4$ | $X = -19,91$<br>$Z = 139,91$ |
| A | $X = -37,68$<br>$Z = 131,68$ | B | $X = -36,80$<br>$Z = 131,76$ |
| $A_1$ | $X = -32,15$<br>$Z = 132,69$ | $B_1$ | $X = -31,35$<br>$Z = 132,93$ |
| $A_2$ | $X = -27,02$<br>$Z = 134,75$ | $B_2$ | $X = -26,24$<br>$Z = 135,14$ |
| $A_3$ | $X = -22,30$<br>$Z = 137,77$ | $B_3$ | $X = -21,65$<br>$Z = 138,30$ |
| $A_4$ | $X = -18,30$<br>$Z = 141,65$ | $B_4$ | $X = -17,77$<br>$Z = 142,30$ |
| S | $X = -37,97$<br>$Z = 131,42$ | $S_4$ | $X = -18,26$<br>$Z = 141,24$ |
| $T_4$ | $X = -17,36$<br>$Z = 142,32$ | $V_4$ | $X = -19,36$<br>$Z = 142,16$ |
| $\theta$ | $X = -37,74$<br>$Z = 131,99$ | $\lambda$ | $X = -36,78$<br>$Z = 132,26.$ |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $x = -750^{mm}$<br>$y = 300$ | $\alpha$ | $x = -1215$<br>$y = -476$ | $\beta$ | $x = -316$<br>$y = -443$ |
| $\gamma$ | $x = -836$<br>$y = 208$ | $\delta$ | $x = -654$<br>$y = 205$ | $\varepsilon$ | $x = -1346$<br>$y = -486$ |
| $\varphi$ | $x = -205$<br>$y = -444$ | | $\alpha\alpha' = 278$<br>$\alpha\alpha'' = 555$ | | $\beta\beta' = 259$<br>$\beta\beta'' = 518$ |
| | $\varepsilon\varepsilon' = 16$<br>$\varphi\varphi' = 15$ | $g$ | $x = -846$<br>$y = -545$ | $g_1$ | $x = -718$<br>$y = -541$ |
| $g_2$ | $x = -593$<br>$y = -532$ | $g_3$ | $x = -481$<br>$y = -520$ | $g_4$ | $x = -387$<br>$y = -506$ |
| $g_5$ | $x = -313$<br>$y = -490$ | $g_6$ | $x = -261$<br>$y = -474$ | $g_7$ | $x = -231$<br>$y = -458$ |

Digitized by Google

| | | |
|---|---|---|
| $g_8 \begin{cases} x = -224 \\ y = -442 \end{cases}$ | $g_9 \begin{cases} x = -236 \\ y = -428 \end{cases}$ | $g_{10} \begin{cases} x = -265 \\ y = -416 \end{cases}$ |
| $m \begin{cases} x = -912 \\ y = -312 \end{cases}$ | $m_1 \begin{cases} x = -776 \\ y = -311 \end{cases}$ | $m_2 \begin{cases} x = -653 \\ y = -307 \end{cases}$ |
| $m_3 \begin{cases} x = -533 \\ y = -301 \end{cases}$ | $m_4 \begin{cases} x = -427 \\ y = -293 \end{cases}$ | $m_5 \begin{cases} x = -341 \\ y = -285 \end{cases}$ |
| $m_6 \begin{cases} x = -270 \\ y = -275 \end{cases}$ | $m_7 \begin{cases} x = -236 \\ y = -266 \end{cases}$ | $m_8 \begin{cases} x = -217 \\ y = -256 \end{cases}$ |
| $a \begin{cases} x = -858 \\ y = -364 \end{cases}$ | $b \begin{cases} x = -838 \\ y = -364 \end{cases}$ | $a_1 \begin{cases} x = -727 \\ y = -362 \end{cases}$ |
| $b_1 \begin{cases} x = -708 \\ y = -361 \end{cases}$ | $a_2 \begin{cases} x = -601 \\ y = -356 \end{cases}$ | $b_2 \begin{cases} x = -583 \\ y = -355 \end{cases}$ |
| $a_3 \begin{cases} x = -485 \\ y = -348 \end{cases}$ | $b_3 \begin{cases} x = -470 \\ y = -347 \end{cases}$ | $a_4 \begin{cases} x = -388 \\ y = -349 \end{cases}$ |
| $b_4 \begin{cases} x = -375 \\ y = -337 \end{cases}$ | $a_5 \begin{cases} x = -311 \\ y = -328 \end{cases}$ | $b_5 \begin{cases} x = -301 \\ y = -326 \end{cases}$ |
| $a_6 \begin{cases} x = -256 \\ y = -317 \end{cases}$ | $b_6 \begin{cases} x = -250 \\ y = -315 \end{cases}$ | $a_7 \begin{cases} x = -225 \\ y = -306 \end{cases}$ |
| $b_7 \begin{cases} x = -222 \\ y = -304 \end{cases}$ | $a_8 \begin{cases} x = -216 \\ y = -296 \end{cases}$ | $b_8 \begin{cases} x = -216 \\ y = -294 \end{cases}$ |
| $s \begin{cases} x = -867 \\ y = -548 \end{cases}$ | $st = 32$<br>$sr = 5$ | $s_4 \begin{cases} x = -388 \\ y = -510 \end{cases}$ |
| $t_4 \begin{cases} x = -366 \\ y = -506 \end{cases}$ | $v_4 \begin{cases} x = -409 \\ y = -506 \end{cases}$ | $\theta \begin{cases} x = -858 \\ y = -534 \end{cases}$ |
| $\lambda \begin{cases} x = -834 \\ y = -532 \end{cases}$ | $\theta\theta' = 160$<br>$\lambda\lambda' = 159$ | $\theta_4 \begin{cases} x = -398 \\ y = -496 \end{cases}$ |
| $\lambda_4 \begin{cases} x = -376 \\ y = -496 \end{cases}$ | $\theta_4\theta'_4 = 148$<br>$\lambda_4\lambda'_4 = 148.$ | |

Le résultat perspectif ayant été porté sur la toile, nous y traçons les contours des surfaces cylindriques; les diverses ellipses qui en représentent les bases, au moyen des points

Digitized by Google

latéraux et de ceux qu'il nous aura été facile de leur ajouter ; les axes des colonnes vers la droite, et par suite vers la gauche ; les contours extérieurs des arcades ; les deux colonnes pour lesquelles nous avons déterminé un plus grand nombre d'éléments ; l'axe $ii'$ de l'édifice. Nous concluons de là les arêtes de contour apparent des surfaces coniques qui forment les toits, en les menant tangentiellement aux bases, tant supérieures qu'inférieures. Nous aurons égard au débordement de ces surfaces, sur les murs, et négligerons leur épaisseur.

Nous construisons les plinthes des colonnes, d'après leur analogie avec celles des deux précédentes ; mais nous pourrions aussi, pour plus d'exactitude, employer le moyen suivant : nous décririons dans les bases des deux plinthes construites directement, les ellipses représentant des cercles inscrits, et, autour des points $g_1$, $g_2$, $g_3$, ..., à l'aide de l'analogie, les ellipses analogues pour les autres plinthes ; nous obtiendrions les côtés de chaque base, en les menant tangentiellement à la courbe ainsi décrite, observant en outre que deux d'entre eux seraient sensiblement dirigés vers le point $i'$, et les deux autres parallèles à la tangente de la grande ellipse que déterminent les axes des colonnes.

Un petit artifice analogue s'applique aux portes et aux fenêtres, parce que nous les faisons dépendre de la construction déjà exécutée. Pour celle de face, par exemple, nous tirons les droites $si'$, $s'i'$, rencontrant la base de la rotonde en deux points $e$, $f$, par lesquels nous élevons des verticales $ee'$, $ff'$ aux $\frac{5}{28}$ de la hauteur totale du mur : elles déterminent les jambages de la porte ; l'arc supérieur qui les réunit est sensiblement un demi-cercle, que nous décrivons. Ces mêmes verticales, prolongées jusqu'aux $\frac{17}{28}$ de la même hauteur du mur, donnent les points $p$, $q$ de la base de la fenêtre correspondante, et par suite cette

Digitized by Google

fenêtre, dont les dimensions sont celles de la porte. Pour les portes et fenêtres latérales, les jambages se construisent pareillement; les points culminants de leurs arcs se trouvent, sans erreur notable, sur les ellipses que l'on ferait passer par les points *h* et *l* des deux premières, et qui représenteraient des cercles horizontaux dans l'espace.

Quant aux moulures des colonnes, ou de la corniche de la galerie, elles doivent être, pour la plupart, dessinées assez vaguement, et se concluent des proportions de l'ordre. Le vitrage, les chambranles des fenêtres, ou autres détails que le problème laisse indéterminés, ne peuvent, par la même raison, faire naître de difficultés : on leur donnera le caractère convenable à l'architecture et à la destination de l'édifice.

UN ÉDIFICE DÉCORÉ DE COLONNES ET D'UN FRONTON DE L'ORDRE IONIQUE. (*Fig.* 148.)

216. *La façade de l'édifice, longue de* 20 *mètres de* A *en* A', *est décorée d'un portique et d'un fronton de l'ordre ionique. Le portique comprend quatre colonnes, hautes de* $7^m,5$ *depuis la base des plinthes jusqu'au-dessous de l'entablement, ce qui détermine le module et la hauteur totale de l'ordre. Les entre-colonnements sont de* 3 *mètres. La profondeur du porche, du plan de la façade jusqu'aux axes des colonnes, égale aussi* 3 *mètres. Sur son côté visible, la longueur* AA'' *de l'édifice est de* 24 *mètres.*

*Les prolongements du soubassement qui enclavent l'escalier ont la hauteur et la largeur du piédestal de l'ordre; leur longueur, depuis le plan de la façade jusqu'au bord* FF' *de la corniche, égale* $9^m,22$. *L'escalier a dix-sept marches. La surface du soubassement, sous les colonnes, s'avance, de la largeur d'une marche, au delà des plinthes.*

*Le sommet* O *du fronton s'élève de* $2^m,19$ *au-dessus de la base de l'entablement.*

Digitized by Google

*L'ordre est surmonté d'un attique haut de* 3 *mètres. Cet attique porte une corniche dont la saillie et la hauteur sont la moitié de celles de la corniche de l'entablement, et qui s'appuie sur le faîte du fronton.*

*Des portes, hautes de* $3^{m},6$ *et larges de* $1^{m},8$, *dans leurs ouvertures, font face aux entre-colonnements. Sur les ailes de la façade et sur le côté visible de l'édifice, des fenêtres sont distribuées symétriquement. On y remarque des pilastres dont les chapiteaux ont les moulures de l'ordre dorique.*

*La déclinaison de la façade égale* 3:4, *de sens tel qu'elle s'éloigne de droite à gauche. On donne:*

$$A \begin{cases} X = \phantom{-}18^{m}, \\ Y = -\phantom{1}8, \\ Z = \phantom{-}75. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 3 *mètres.*

L'édifice dont il s'agit est beaucoup plus rapproché du spectateur que ne l'était le précédent, et bien que les dimensions soient un peu moindres, certains détails devront être déterminés avec une assez grande précision. Nous ferons dépendre sa construction perspective des éléments suivants:

Les points A, A′, A″; les bords supérieurs de la corniche de l'entablement CC‴C′ et CC″; les droites BB‴B′ et BB″, qui forment, sur la frise, la naissance de la corniche; les droites DD′ et DD″, EE′ et EE″, qui limitent pareillement l'architrave; les lignes analogues aux précédentes sur le portique MOM′, NN′, PP′, QQ′; le faîtage OO′ du fronton; le sommet J du triangle intérieur; les bords supérieurs HH‴H′ et HH″ de la corniche du soubassement sur les murs de l'édifice, ainsi que les lignes à la base du socle GG‴ et GG″; les analogues sur les prolongements du soubassement FF′ et F″F‴, KK′ et K″K‴; les axes des colonnes aboutissant sur le plan du stylobate en I, I′, I″, I‴.



Digitized by Google

Nous déterminons, en outre, sur la première colonne, vers la droite, la base TUV de la plinthe; les arêtes de contour apparent du fût $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$; les points latéraux extérieurs des contours de ses volutes $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$; leurs points latéraux intérieurs $\varphi$, $\varphi'$; les points culminants $\pi$ et $\tau$ de l'une d'elles, vers la droite, et le centre $\omega$ de son œil; enfin, les points principaux des portes de la façade.

Nous savons, d'ailleurs, que la hauteur des colonnes fait connaître la valeur du module, savoir, $0^m,417$; par suite les hauteurs et saillies de toutes les parties de l'ordre. Nous trouverons en particulier que la hauteur de l'entablement égale $1^m,667$, dont $0^m,667$ pour la corniche, $0^m,500$ pour la frise, et autant pour l'architrave; la saillie de la corniche égale sa hauteur; la hauteur du soubassement, $2^m,222$, et la saillie de sa corniche, $0^m,208$; sa longueur sous le porche, au-dessus de la corniche, $10^m,250$; la largeur FF' de ses prolongements prise, également au-dessus de la corniche, $1^m,583$, etc.

Les ordonnées Y sont connues pour la plupart des points, en vertu des proportions de l'ordre, tandis que les X et Z se concluent d'une projection géométrale de l'édifice. Les points latéraux de la volute sont sensiblement à la hauteur de l'œil; les culminants peuvent être pris sur une verticale passant par ce point, et l'on trouvera $\omega\pi = 0^m,161$, $\omega\tau = 0^m,206$.

La détermination du point J peut exiger quelques explications. Les points M et M', sur le bord extérieur du fronton, sont les points qui seraient aux angles de la corniche, si on la supposait tout entière prolongée horizontalement au-dessus du portique; d'ailleurs, le plan du tympan est celui de la frise, de sorte que deux sections faites perpendiculairement aux moulures seraient égales dans la corniche horizontale et dans celle qui est inclinée; et nous savons que dans la corniche horizontale la saillie est égale à la hauteur:

Digitized by Google

en conséquence, soient (*fig. b*) MOM′ le réglet de la corniche du fronton, projeté sur un plan parallèle à la façade; $M_1O_1M'_1$ sa projection géométrale. Deux droites J′J, J″J, parallèles à MO, M′O, et distantes de celles-ci de la saillie de la corniche ou de $0^m,667$, détermineront, par leur rencontre, la projection verticale J du point demandé. Une droite $N_1N'_1$, parallèle à MM′ et menée à la même distance, sera la projection géométrale de la frise; et la perpendiculaire $JJ_1O_1$ donnera la projection géométrale $J_1$.

Pour assigner quelques points sur les trois dernières colonnes, on déduirait leurs coordonnées aériennes de celles des points correspondants de la première, en observant que les différences respectives entre les X et les Z, pour ces points, sont les mêmes que pour les axes de leurs fûts déjà déterminés, savoir : $2^m,4$ et $1^m,8$.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A′ | X = 2,00 m<br>Z = 87,00 | A″ | X = 32,40<br>Z = 94,20 | C | X = 18,13<br>Z = 74,07 |
| C′ | X = 1,07<br>Z = 86,87 | C″ | X = 33,33<br>Z = 94,33 | C‴ | X = 14,02<br>Z = 77,15 |
| D | X = 18,02<br>Z = 74,85 | D′ | X = 1,85<br>Z = 86,98 | D″ | X = 32,54<br>Z = 94,22 |
| H | X = 18,04<br>Z = 74,71 | H′ | X = 1,71<br>Z = 86,96 | H″ | X = 32,69<br>Z = 94,24 |
| O | X = 7,59<br>Z = 77,78 | O′ | X = 10,00<br>Z = 81,00 | M | X = 12,00<br>Z = 74,47 |
| M′ | X = 3,17<br>Z = 81,10 | J | X = 7,99<br>Z = 78,31 | N | X = 11,87<br>Z = 75,40 |
| N′ | X = 4,10<br>Z = 81,23 | P | X = 11,89<br>Z = 75,25 | P′ | X = 3,95<br>Z = 81,21 |
| F | X = 8,57<br>Z = 70.55 | F′ | X = 7,29<br>Z = 71,50 | F″ | X = 1,63<br>Z = 73,75 |



Digitized by Google

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| K | X = 8,56 m<br>Z = 70,61 | K′ | X = 7,35<br>Z = 71,51 | K″ | X = 1,64<br>Z = 73,81 |
| I | X = 11,80<br>Z = 75,90 | I′ | X = 9,40<br>Z = 77,70 | T | X = 11,92<br>Z = 75,08 |
| U | X = 10,98<br>Z = 75,78 | V | X = 12,62<br>Z = 76,12 | α | X = 12,22<br>Z = 75,90 |
| ε | X = 12,04<br>Z = 75,21 | ε′ | X = 11,07<br>Z = 75,94 | ε″ | X = 12,53<br>Z = 75,86 |
| φ | X = 11,78<br>Z = 75,41 | ω | X = 11,23<br>Z = 75,83 | R | X = 10,72<br>Z = 80,46 |
| R′ | X = 8,32<br>Z = 82,26. | | | | |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | x = 720 mm<br>y = 320 | a′ | x = 69<br>y = 276 | a″ | x = 1032<br>y = 255 |
| e | x = 734<br>y = 202 | c′ | x = 37<br>y = 173 | c″ | x = 1060<br>y = 159 |
| c‴ | x = 548<br>y = 194 | ab = | 147 | a″b″ = | 117 |
| | | a′b′ = | 127 | ae = | 187 |
| a′e′ = | 161 | | | | |
| a″e″ = | 148 | d | x = 722<br>y = 154 | d′ | x = 64<br>y = 132 |
| d″ | x = 1036<br>y = 122 | h | x = 724<br>y = — 167 | h′ | x = 59<br>y = — 144 |
| h″ | x = 1041<br>y = — 133 | h‴ | x = 539<br>y = — 161 | o | x = 293<br>y = 277 |
| o′ | x = 370<br>y = 266 | j | x = 306<br>y = 248 | m | x = 484<br>y = 201 |
| m′ | x = 117<br>y = 185 | n | x = 472<br>y = 172 | n′ | x = 151<br>y = 160 |
| p | x = 474<br>y = 153 | p′ | x = 146<br>y = 142 | nq = | 40 |
| | | | | n′q′ = | 37 |

Digitized by Google

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $x = 364^{mm}$, $y = -177$ | $f'$ | $x = 306$, $y = -175$ | $f''$ | $x = 66$, $y = -170$ |
| $f'''$ | $x = 15$, $y = -168$ | $g$ | $x = 723$, $y = -257$ | $g''$ | $x = 1038$, $y = -203$ |
| $g'''$ | $x = 536$, $y = -246$ | $k$ | $x = 364$, $y = -271$ | $k'$ | $x = 308$, $y = -268$ |
| $k''$ | $x = 67$, $y = -259$ | $k'''$ | $x = 17$, $y = -257$ | $i$ | $x = 466$, $y = -165$ |
| $i'$ | $x = 363$, $y = -161$ | $i''$ | $x = 264$, $y = -157$ | $i'''$ | $x = 170$, $y = -154$ |
| $t$ | $x = 476$, $y = -167$ | $u$ | $x = 435$, $y = -165$ | $v$ | $x = 498$, $y = -165$ |
| $\alpha$ | $x = 483$, $y = -145$ | $\beta$ | $x = 450$, $y = -145$ | $\varepsilon$ | $x = 480$, $y = 122$ |
| $\varepsilon'$ | $x = 437$, $y = 121$ | $\varepsilon''$ | $x = 496$, $y = 121$ | $\varphi$ | $x = 469$, $y = 121$ |
| $\varphi'$ | $x = 449$, $y = 121$ | $\omega$ | $x = 473$, $y = 122$ | $\omega'$ | $x = 444$, $y = 121$ |
| | $\omega\pi = 6$, $\omega\tau = 8$ | $r$ | $x = 400$, $y = -21$ | $s$ | $x = 341$, $y = -21$ |
| $r'$ | $x = 303$, $y = -21$ | $s'$ | $x = 248$, $y = -21$ | $r''$ | $x = 500$, $y = -22$ |
| $s''$ | $x = 439$, $y = -22$. | | | | |

Le résultat perspectif nous donne immédiatement, comme dans le problème de la rotonde, une sorte de canevas de l'édifice dont nous complétons les formes architecturales, en nous réglant principalement sur les proportions de l'ordre auquel il appartient, et observant la convergence des lignes parallèles dans l'espace. La corniche supérieure $ww'$, dont aucun point n'est calculé, sera dans sa hauteur et ses saillies

Digitized by Google

la moitié de celle de l'entablement, et s'appuiera sur le point $o'$. Les droites $o'l$, intersection du toit avec la façade, et $jj'$, s'écartent peu du parallélisme, leur point de concours étant situé verticalement au-dessus du point de concours des droites $aa'$, $mm'$, etc. Les autres droites $om'$, $jj''$ concourent en un point situé verticalement au-dessous du précédent. Les moulures des colonnes au-dessus des plinthes ne diffèrent pas très-sensiblement, en perspective, de leurs projections sur un plan vertical, et nous les dessinons sans difficulté, en observant les rapports de hauteur et de saillie qu'elles doivent avoir. La première marche de l'escalier devant s'aligner sur le dé du soubassement, et la dernière devant aller jusqu'aux plinthes, nous les construisons, ainsi que les marches intermédiaires, dont on trouverait, en la calculant, la hauteur sensiblement la même pour toutes et égale à 5 millimètres. Enfin, nous distribuons des fenêtres sur la face latérale, par les divisions de sa hauteur et de sa longueur en parties proportionnelles, et nous ajoutons les pilastres, chambranles et autres accessoires de la décoration de l'édifice.

INTÉRIEUR D'UNE CHAMBRE. (*Fig.* 149.)

217. *Une chambre carrée a* 6 *mètres de côté sur* 4 *de hauteur; deux côtés du carré sont parallèles au tableau, et le centre est dans le plan normal. Vers la gauche, elle est éclairée par deux fenêtres, d'une disposition symétrique, ayant une hauteur* BB' *de* $3^m,4$, *et une largeur* BC *de* $1^m,8$; *cette largeur est mesurée en dehors des baies, dont la largeur* CD *égale* $0^m,3$, *et décline de* 30 *degrés. Le trumeau, ou le parement de mur qui sépare les fenêtres, a sa largeur* CE *de* $1^m,4$. *Vers la droite, une cheminée correspond, par sa position, au trumeau; sa tablette, élevée de* $1^m,1$ *au-dessus du sol, a sa longueur*

Digitized by Google

PQ *de* $1^m,5$, *et sa largeur* PP″ *de* $0^m,4$ ; *elle porte une glace ayant* $2^m,3$ *sur* $1^m,3$.

*Au milieu de la chambre est une table ronde, haute de* $0^m,9$, *dont le cercle supérieur a* $0^m,6$ *de rayon. Le plafond est orné de cinq rosaces, dont une au centre, ayant* $0^m,6$ *de rayon ; les quatre autres ont* $0^m,3$, *et leur distribution est celle qu'exige la symétrie.*

*Dans le mur du fond, on remarque deux portes ayant* $2^m,4$ *sur* 1 *mètre, la distance* HG *de leurs ouvertures aux murs latéraux étant de* $0^m,4$. *Une d'elles est ouverte, et laisse entrevoir une seconde chambre semblable et égale à la première. L'épaisseur* HK *de la cloison égale* $0^m,4$.

*Le point de vue est placé à* 12 *mètres de ce mur du fond; il est élevé de* $1^m,6$ *au-dessus du sol. La distance centrale* = 1 *mètre, et les dimensions du tableau sont telles, que le champ perspectif* AA′A″A‴ *embrasse exactement la totalité de la chambre.*

L'énoncé du problème laisse indéterminés un assez grand nombre d'objets qui peuvent entrer dans l'ameublement de la chambre, ainsi que le détail des ornements, tels que les moulures des boiseries, le support de la table, etc. Mais les points principaux de ces accessoires de nature diverse auront toujours des positions faciles à calculer, du moins avec une approximation suffisante; et les petites portions de surfaces géométriques dans lesquelles ils seraient susceptibles de se décomposer échapperaient peut-être à des opérations plus exactes, d'après la distance attribuée au point de vue. La canevas de la perspective demandée devient en conséquence extrêmement simple, les coordonnées aériennes de tous les points qui en dépendent se concluant immédiatement des conditions spécifiées.

En outre des points et des lignes déjà nommés, nous déterminerons les verticales JJ′ et $J_1J'_1$, lignes médianes des fenêtres; les points $G_1$, $F_1$, $E_1$, $C_1$ de la seconde chambre,



Digitized by Google

analogues par leurs positions aux points G, F, E, C; les deux diamètres rectangulaires MN, OL du cercle supérieur de la table, dont le premier est parallèle au tableau; les diamètres analogues ST, UR de la grande rosace, S'T', U'R', S"T", U"R" des deux petites à gauche.

*Résultat perspectif.*

| | | |
|---|---|---|
| $a \begin{cases} x = -500 \\ y = -267 \end{cases}$ | $b \begin{cases} x = -461 \\ y = -246 \end{cases}$ | $aa' = 667$<br>$bb' = 523$ |
| $c \begin{cases} x = -361 \\ y = -193 \end{cases}$ | $d \begin{cases} x = -394 \\ y = -197 \end{cases}$ | $cc' = 410$<br>$dd' = 417$ |
| $j \begin{cases} x = -421 \\ y = -216 \end{cases}$ | $e \begin{cases} x = -309 \\ y = -165 \end{cases}$ | $f \begin{cases} x = -261 \\ y = -139 \end{cases}$ |
| $i \begin{cases} x = -283 \\ y = -141 \end{cases}$ | $j_1 \begin{cases} x = -303 \\ y = -151 \end{cases}$ | $g \begin{cases} x = -250 \\ y = -133 \end{cases}$ |
| $h \begin{cases} x = -217 \\ y = -133 \end{cases}$ | $hh' = 200$<br>$hh'' = 83$ | $k \begin{cases} x = -210 \\ y = -129 \end{cases}$ |
| $c_1 \begin{cases} x = -204 \\ y = -109 \end{cases}$ | $e_1 \begin{cases} x = -186 \\ y = -100 \end{cases}$ | $f_1 \begin{cases} x = -165 \\ y = -90 \end{cases}$ |
| $g_1 \begin{cases} x = -163 \\ y = -87 \end{cases}$ | $p \begin{cases} x = -315 \\ y = -61 \end{cases}$ | $q \begin{cases} x = -267 \\ y = -52 \end{cases}$ |
| $pp' = 133$<br>$pp'' = 49$ | $m \begin{cases} x = -67 \\ y = -78 \end{cases}$ | $l \begin{cases} x = 00 \\ y = -73 \end{cases}$ |
| $o \begin{cases} x = 00 \\ y = -83 \end{cases}$ | $u \begin{cases} x = 000 \\ y = 286 \end{cases}$ | $r \begin{cases} x = 000 \\ y = 250 \end{cases}$ |
| $s \begin{cases} x = -67 \\ y = 267 \end{cases}$ | $r' \begin{cases} x = -192 \\ y = 308 \end{cases}$ | $u' \begin{cases} x = -208 \\ y = 333 \end{cases}$ |
| $r'' \begin{cases} x = -139 \\ y = 222 \end{cases}$ | $u'' \begin{cases} x = -147 \\ y = 235. \end{cases}$ | |

Ce résultat étant porté sur le tableau, nous traçons les verticales et autres lignes qu'il détermine immédiatement.

Digitized by Google

Les verticales $gg'$, $jj'$, $ff'$, par exemple, seront élevées des points $g$, $j$, $f$, jusqu'à leurs rencontres avec les fuyantes $a'$ V, $d'$ V, $c'$ V. La glace devant s'élever, dans l'espace, au niveau de l'embrasure des fenêtres, nous tirons de la rencontre de $c'$ V avec $gg'$ l'horizontale $g' g'''$, et par $g'''$ une fuyante qui doit limiter cette hauteur sur le tableau. Les baguettes verticales du cadre sont d'ailleurs suffisamment déterminées par leur position sur la tablette $qpp''$. Le vitrage des fenêtres et la distribution des ornements sur les murs ne présentent pas plus de difficultés.

Le point d'intersection de $mn$ avec la ligne normale correspond au centre de la table, et la verticale abaissée de ce point jusqu'à la rencontre des diagonales du parquet en représente la hauteur, autour de laquelle nous dessinons les ornements du support.

La glace réfléchit vers le spectateur l'image d'une partie du fond de la chambre. En admettant que la surface de réflexion coïncide avec le mur sur lequel elle s'applique, nous obtenons l'image particulière $\alpha_1$ d'un point quelconque $\alpha$, en tirant l'horizontale $\alpha\alpha_1$ de longueur telle, que l'arête $g'' g'''$ la divise en parties égales : il est superflu d'ajouter que cette image ne serait pas visible, si l'extrémité de l'horizontale se trouvait extérieure aux limites de la glace.

Les divisions du parquet peuvent être assez distinctes sur le premier plan du tableau, pour qu'on juge nécessaire de les figurer. Leur détermination se rapporte au n° 117; si toutes les lignes y sont à 45 degrés de déclinaison, et qu'on fasse usage des points de distance, on les obtient immédiatement, en prenant sur $aa'''$ les divisions telles qu'on les suppose aux limites de la chambre, par lesquelles on dirige des droites vers ces deux points.

Les centres des rosaces se trouvent déterminés comme les intersections de leurs diamètres. Mais le centre de la

Digitized by Google

première doit coïncider avec la rencontre des diagonales du plafond; les centres des autres sont respectivement sur les rencontres des mêmes diagonales avec les fuyantes qui divisent symétriquement chaque demi-largeur de ce carré; de chaque côté, les courbes sont comprises tangentiellement entre les mêmes fuyantes, menées par les extrémités de leurs diamètres horizontaux, et l'intervalle $s_1 t_1$ des fuyantes, mesuré sur le prolongement du diamètre de la grande rosace, est égal à la moitié de ce diamètre.

On voit que la toile doit avoir 667 millimètres de hauteur sur 1 mètre de largeur, pour satisfaire à la condition relative au champ du tableau. Ce sont les dimensions perspectives de la surface intérieure du mur le plus rapproché du spectateur, surface dont nous faisons d'ailleurs abstraction.

INTÉRIEUR D'UNE BASILIQUE. (*Fig.* 150.)

218. *La nef principale d'une basilique régulière est divisée symétriquement par le plan normal. Les piliers ou grosses colonnes qui en supportent les murs ont* 7 *mètres de hauteur, dont* 1 *mètre pour le chapiteau,* $5^m,3$ *pour le fût,* $0^m,1$ *pour le congé et la ceinture,* $0^m,25$ *pour le tore et* $0^m,35$ *pour le socle. Le tailloir au-dessus du chapiteau a* 2 *mètres de côté, le fût* $1^m,4$ *de diamètre, le tore et le socle* $1^m,8$ *de diamètre ou de côté.*

*Ces piliers, séparés par des intervalles de* 6 *mètres d'axe en axe, comprennent des arcades en ogives régulières* (*), *dont les faces s'appuient sur les chapiteaux et sont en retraite de* $0^m,1$ *sur les fûts : la largeur et l'épaisseur à la base du cintre sont en conséquence de* $1^m,2$.

(*) Les ogives étant généralement formées par des arcs de cercle symétriques qui se terminent en arêtes, j'appelle *régulière* celle où les centres des deux arcs sont aux extrémités de la base, de sorte que la hauteur du point d'arête égale la moitié de la base multipliée par $\sqrt{3}$.

Digitized by Google

*La largeur de la nef, mesurée sur les axes des piliers, égale* 16 *mètres, ou sur les murs des arcades,* $14^m,8$.

*Au-dessus des arcades règne une galerie dont les compartiments se terminent en ogives égales aux précédentes. La hauteur* C'K *du point d'arête au-dessus de la base, se composant de la hauteur de l'ogive et de celle des pieds-droits, est de* 8 *mètres. L'épaisseur* CK *de la voûte au-dessus des arcades est de* $1^m,34$. *Chacun de ces compartiments se découpe en trois petites arcades, supportées par des colonnes hautes de* $3^m,84$, *épaisses de* $0^m,2$, *avec des ogives dont la hauteur égale* $1^m,6$, *et la base* $1^m,4$ : *celle du milieu est surmontée d'un œil-de-bœuf.*

*Une rangée de fenêtres couronne la galerie : leurs dimensions, mesurées sur le bandeau qui les circonscrit, sont les mêmes que celles des compartiments de la galerie. L'épaisseur* C'K' *égale* $1^m,34$, *comme* CK.

*De longues colonnes d'un petit diamètre, s'appuyant sur les tailloirs des piliers, s'élèvent jusqu'à la hauteur de* $27^m,5$ *au-dessus du sol; elles servent de support à deux systèmes de nervures épaisses de* $0^m,2$, *dont les unes, parallèles au plan du tableau, forment des ogives où le point d'arête est élevé de* $9^m,5$ *au-dessus de la base, cette hauteur étant prise au-dessus de l'épaisseur; les autres parcourent diagonalement deux travées, et s'entre-croisent en des clefs de voûte dont l'épaisseur est de* $0^m,2$. *Toutes ces nervures décomposent la voûte totale en intrados ou voûtes partielles.*

*Les rangées de grosses colonnes se terminent par des antes, c'est-à-dire par des massifs rectangulaires, où les arcades s'appuient sur des pilastres; ces massifs s'élèvent au niveau des longues colonnes. Des antes égales sont à l'entrée du chœur, et l'intervalle qui les sépare des premières, sur leurs axes, est équivalent à deux travées et occupé par une nef transversale.*

Digitized by Google

*Le chœur, de même largeur que la nef principale, comprend sur chaque côté quatre travées : il se termine par un hémicycle contenant cinq fenêtres et autant de compartiments de galerie, dont la largeur est nécessairement réduite, celle des pieds-droits restant la même.*

*L'axe du neuvième pilier de chaque rangée, à partir de l'ante, est distant de 24 mètres du plan central; le point de vue est élevé de* $3^m,5$ *au-dessus du sol.*

*La distance centrale* = 1 *mètre.*

Il suffit d'opérer pour la moitié de la basilique située à gauche du plan de symétrie. Or, rien ne serait plus facile que de déterminer par le calcul, ou la construction géométrale, tous les points dont nous ferons les sommets du canevas de la perspective cherchée ; mais nous nous réservons d'exécuter sur le tableau des divisions en parties égales ou proportionnelles, et la construction directe ne s'appliquera qu'à un petit nombre d'éléments, savoir :

Le neuvième pilier à partir de l'ante : nous supposerons que ce soit le plus rapproché parmi ceux qu'embrasse le champ perspectif; l'arcade et, sur le même plan, toute la travée comprise entre ce pilier et le huitième ; sur la voûte de la nef, les deux travées du huitième au sixième pilier; le second pilier de la rangée et la travée qu'il détermine avec l'ante; les fenêtres et la clef de voûte de l'hémicycle.

A cet effet, sur le neuvième pilier, nous considérerons spécialement : le bord AB du tailloir, à sa surface supérieure ; les arêtes de contour apparent du fût $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ ; les points latéraux du tore $\gamma$, $\delta$, et son point culminant inférieur $\omega$ ; le socle LMNN'M'.

Sur l'arcade adjacente, le sommet ou point d'arête C ; les points à 45 degrés E, F des deux arcs; les points G, H à la base de l'ogive, auxquels nous joindrons D et D', sur la base de la voûte de la neuvième arcade : ces quatre derniers

Digitized by Google

points ne sont pas exactement visibles, mais ils contribuent à la détermination des arcs.

Sur le compartiment de la galerie, les points C′, E′, F′, G′, analogues à ceux de l'arcade et situés sur les mêmes verticales, ainsi que le point J à la base; les sommets U, U′, U″ des trois petites ogives, et les points V, W, à la base de celle du milieu.

Pour les arcs de la voûte, nous prendrons le point I, sommet de l'ogive correspondante au huitième pilier; le point K à la base de cette ogive, sur le chapiteau de la longue colonne, dont il servira à limiter la hauteur; les points P, Q, à 45 degrés sur les arcs entre-croisés. Ces quatre points sont calculés au-dessus et en avant de l'épaisseur des nervures.

La deuxième colonne et la travée adjacente à l'ante seront déterminées, dans leurs parties visibles, par l'arête de contour $6'_1 6'_1$ du fût, qu'il est permis de supposer située dans une section méridienne, parallèle au tableau; et par un certain nombre de points $A_1$, $B_1$, $M_1$, $C_1$, . . ., analogues à ceux qui précèdent. Les points $I_1$, $P_1$, $Q_1$ appartiendront à l'ogive et aux arcs entre-croisés qui s'appuient sur les antes.

Enfin, dans l'hémicycle, nous nous bornerons à prendre le point $I_2$, sommet de la voûte, et sur chaque fenêtre les points au sommet et à la base, en les désignant respectivement par R, S, T; R′, S′, T′; R″, S″, T″.

Les ordonnées Y de tous les points pourraient être considérées comme connues. Nous remarquerons en particulier que la hauteur du sommet de chaque ogive régulière au-dessus de sa base égale $4^m,16$. Les sommets des ogives de la voûte ou des petites arcades sont donnés à priori : leur élévation au-dessus du sol est de 37 mètres. On reconnaîtra en outre que chacun des arcs entre-croisés se compose très-sensiblement de deux arcs de 90 degrés, aboutissant à la clef de voûte, en supposant qu'à leur origine les nervures qui s'appuient sur le chapiteau d'une même colonne se con-

Digitized by Google

fondent dans leur épaisseur. Les hauteurs des points à 45 degrés sur ces arcs, aussi bien que sur tous les autres, peuvent, en conséquence, se calculer immédiatement. Le point ω de la surface du tore est à peu près situé dans le plan de la base supérieure du socle L′M′N′, dont il n'est pas distant de 2 millimètres.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| α | X = | — 8,66 m | ϵ | X = | — 7,33 |
| | Z = | 23,76 | | Z = | 24,20 |
| γ | X = | — 8,84 | δ | X = | — 7,14 |
| | Z = | 23,68 | | Z = | 24,25 |
| ω | X = | — 3,50 | E | X = | — 6,89 |
| | Z = | 29,40 | | Z = | 28,00 |
| P | X = | — 5,23 | Q | X = | — 5,23 |
| | Y = | 30,72 | | Y = | 30,72 |
| | Z = | 34,12 | | Z = | 37,64 |
| S | X = | — 1,71 | R′ | X = | — 4,35 |
| | Z = | 115,20 | | Z = | 113,99 |
| S′ | X = | — 5,61 | R″ | X = | — 7,04 |
| | Z = | 112,82 | | Z = | 110,29 |
| S″ | X = | — 7,38 | T″ | X = | — 6,32 |
| | Z = | 109,00 | | Z = | 111,85. |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | $x$ = | — 365 mm | ϵ | $x$ = | — 303 | αα′ = | 223 |
| | $y$ = | — 118 | | $y$ = | — 116 | ϵϵ′ = | 219 |
| γ | $x$ = | — 373 | δ | $x$ = | — 294 | ω | $x$ = — 345 |
| | $y$ = | — 128 | | $y$ = | — 125 | | $y$ = — 136 |
| $a$ | $x$ = | — 304 | $b$ | $x$ = | — 280 | $m$ | $x$ = — 307 |
| | $y$ = | 152 | | $y$ = | 140 | | $y$ = — 152 |

Digitized by Google

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $x = -285^{mm}$, $y = -141$ | $mm' =$ | 15, $ml =$ 78 | $c$ | $x = -274$, $y = 284$ |
| $e$ | $x = -264$, $y = 246$ | $f$ | $x = -285$, $y = 265$ | $g$ | $x = -252$, $y = 119$ |
| $h$ | $x = -301$, $y = 142$ | $d$ | $x = -316$, $y = 150$ | $d'$ | $x = -367$, $y = 150$ |
| | $cc' = 346$, $ce' = 334$ | | $ff' = 359$, $gg' = 318$ | | $g'j = 131$ |
| $u$ | $x = -274$, $y = 535$ | $u'$ | $x = -263$, $y = -512$ | $u''$ | $x = -287$, $y = -560$ |
| $v$ | $x = -267$, $y = 463$ | $w$ | $x = -281$, $y = 488$ | $i$ | $x = 0000$, $y = 1120$ |
| $k$ | $x = -310$, $y = 803$ | $p$ | $x = -153$, $y = 900$ | $q$ | $x = -139$, $y = 816$ |
| $e_1$ | $x = -112$, $y = -43$ | $a_1$ | $x = -108$, $y = 54$ | $b_1$ | $x = -105$, $y = 52$ |
| $m_1$ | $x = -109$, $y = -54$ | $n_1$ | $x = -106$, $y = -52$ | $c_1$ | $x = -107$, $y = 111$ |
| $c_1$ | $x = -106$, $y = 98$ | $g_1$ | $x = -104$, $y = 49$ | $h_1$ | $x = -111$, $y = 53$ |
| $i_1$ | $x = 000$, $y = 466$ | $p_1$ | $x = -74$, $y = 438$ | $q_1$ | $x = -71$, $y = 417$ |
| $r$ | $x = 000$, $y = 228$ | $s$ | $x = -15$, $y = 159$ | $r'$ | $x = -38$, $y = 230$ |
| $s'$ | $x = -50$, $y = 162$ | $t'$ | $x = -25$, $y = 159$ | $r''$ | $x = -64$, $y = 239$ |
| $s''$ | $x = -68$, $y = 168$ | $t''$ | $x = -54$, $y = 164$. | | |

Le résultat perspectif étant construit, nous tirons les lignes $mnm_1n_1, \ldots, aba_1b_1, cc_1, \ldots, pp_1, qq_1$, lesquelles

Digitized by Google

se trouveront dirigées vers le centre ; et, par des divisions perspectives de ces droites, aussi bien que de l'arête de voûte $ii_1 i_2$, située sur la ligne normale, nous déterminons, pour les travées intermédiaires ou leurs prolongements, des points analogues à $m$, $n$, $a$, $b$, $c$.... Les petites arcades de la galerie, qui peuvent être visibles dans ces travées, seront faciles à construire au moyen de leur comparaison avec celles de la huitième.

Sur les verticales qui passent par les points principaux des arcades, nous prenons des longueurs telles que $c'c''$, $g'g''$, $e'e''$,..., respectivement égales à $cc'$, $gg'$, $ee'$,..., et nous obtenons les points analogues $c''$, $g''$, $e''$,... sur le contour du bandeau de chaque fenêtre, comme cela résulte de l'une des conditions du problème. Nous aurions pu également déterminer d'abord les fuyantes qui doivent contenir les mêmes points, et opérer par divisions perspectives. Les détails des vitraux, laissés arbitraires par l'énoncé, seront distribués dans ces compartiments.

Les ogives de la voûte, parallèles au tableau dans l'espace, sont en perspective des ogives semblables faciles à décrire. Chacun de leurs arcs, par exemple $ki$, est déterminé par la condition de passer par les points $k$, $i$, et d'avoir son centre sur l'horizontale $kk'$, base de l'ogive. D'ailleurs, le centre $\varepsilon$ de cet arc étant trouvé, on en conclut les centres de tous ses analogues, comme les rencontres des fuyantes menées par $\varepsilon$ avec les bases des autres ogives.

Les points $s$, $t$, $s'$, $t'$, $s''$, $t''$, dans le fond du chœur, se trouvent rangés sur un arc elliptique aboutissant aux deux verticales qui forment les limites de l'hémicycle, et il en est ainsi des points $r$, $r'$, $r''$, sommets des bandeaux des fenêtres. Nous décrivons par analogie, à partir des points où les mêmes verticales rencontrent les fuyantes $cc_1$, $gg_1$ sur la gauche et leurs correspondantes sur la droite, deux autres arcs elliptiques qui doivent contenir les bases et les

Digitized by Google

sommets des compartiments de la galerie dans le chœur, et qui suffiront pour assigner leur position au-dessous des fenêtres.

Nous tiendrons compte des épaisseurs des nervures de la voûte ou des longues colonnes qui les supportent, en les comparant avec les dimensions des piliers qui leur sont adjacents. Mais beaucoup d'autres accessoires restent indéterminés, parmi lesquels nous remarquerons les chapiteaux des piliers : quelle que soit leur configuration, il nous sera permis de réduire leurs perspectives à des projections sur des plans perpendiculaires aux rayons visuels. Ces ornements auront un même caractère sur les piliers et sur toutes les colonnes qui entrent dans la décoration de l'édifice.

La direction attribuée à l'axe de la nef, dans ce problème, ne serait peut-être pas la plus conforme aux règles du goût et à certains usages traditionnels de la composition, telle qu'on l'entend d'une manière plus spéciale dans l'art de la peinture. Il convient en effet, pour la représentation pittoresque d'un intérieur de monument analogue à celui-ci, de ne pas faire coïncider exactement son plan de symétrie avec le plan normal : une légère déviation du premier de ces plans par rapport au second, qui permette encore à l'œil du spectateur de plonger dans toute la profondeur de l'édifice, donne un arrangement plus heureux, puisqu'elle fait disparaître la monotonie des aspects des deux parties semblables et les présente sous des faces un peu diverses. Mais cette modification des données du problème eût compliqué notablement le détail des résultats numériques, sans augmenter d'ailleurs les difficultés réelles de l'opération. Au reste, le rôle de la perspective linéaire se borne à produire l'image d'un système de lignes conçu dans l'espace, quel que puisse être le mérite de cette conception, qu'elle n'a pas à apprécier.

On peut s'exercer sur le même sujet, en supposant que



Digitized by Google

le plan de symétrie ait tourné autour d'une verticale passant par le milieu de la droite qui joint les centres des neuvièmes piliers sur les deux rangées, et qu'il ait pris une déclinaison = 9:1, la position du point de vue restant invariable. L'axe de perspective passera par les travées latérales du chœur, qui ne cessera pas d'être totalement visible.

UN PAYSAGE. (*Fig.* 151.)

219. *Un bras de mer pénètre entre deux chaînes de collines sinueuses, et vient mettre à flot les navires d'un port bâti au pied de l'une de ces collines. Les quais s'étendent en ligne droite, et leur déclinaison* = 5:2. *On remarque dans leur alignement deux principales files de maisons* AD *et* GH, *longues respectivement de* 180 *et de* 270 *mètres, séparées par un intervalle* DG *de* 120 *mètres. La longueur* AB *de la première maison égale* 25 *mètres, son épaisseur* AC 14 *mètres, et la hauteur* AA' *de sa façade* 18 *mètres. La distance* AM *des maisons au bord des quais adjacents est de* 90 *mètres, et le chenal, ou le bassin du port, a sa largeur* MN *égale à* 70 *mètres.*

*L'entrée du golfe est commandée par une tour* VV' *haute de* 30 *mètres, bâtie sur un roc escarpé, vers la droite. A l'opposite, on aperçoit un poste de signaux.*

*La hauteur moyenne des collines est évaluée de* 140 *à* 170 *mètres au-dessus du sol des quais, supposé horizontal. Le point de vue est élevé de* 100 *mètres au-dessus du même niveau; on peut le concevoir situé sur le versant d'une colline opposée au port.*

$$A \begin{cases} X = -150^{m} \\ Z = \quad 500. \end{cases}$$

*La distance centrale* = 2 *mètres.*

Les éléments du problème sont très-sommaires, et don-

Digitized by Google

nent seulement une idée générale d'un paysage maritime ; mais il eût été superflu d'entrer dans un grand nombre de détails.

La distance considérable de la plupart des objets au point de vue abrége les opérations de l'épure, et les réduit, pour ainsi dire, à leur dernier degré de simplicité. Nous fixerons sur un plan géométral les projections de tous les points destinés, dans notre pensée, à caractériser le sujet du tableau, et nous en conclurons leurs coordonnées aériennes. Mais nous nous bornerons à ceux qui sont spécifiés dans l'énoncé, en donnant à S et V les positions indiquées ci-après. Les bords du chenal seront déterminés au moyen des points P et Q, distants de 600 mètres de M et N.

*Résultat géométral.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B | X = | — 141,5 m | C | X = | — 170,0 |
| | Z = | 521,4 | | Z = | 504,8 |
| D | X = | — 88,5 | G | X = | — 47,5 |
| | Z = | 653,8 | | Z = | 756,3 |
| H | X = | 44,8 | M | X = | — 73,1 |
| | Z = | 987,0 | | Z = | 469,2 |
| N | X = | — 13,3 | P | X = | 132,0 |
| | Z = | 445,2 | | Z = | 982,0 |
| V | X = | 750,0 | S | X = | — 160,0 |
| | Y = | 120,0 | | Y = | 50,0 |
| | Z = | 3300,0 | | Z = | 2000,0. |

*Résultat perspectif.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *a* | $x$ = | — 600 mm | *b* | $x$ = | — 543 |
| | $y$ = | — 400 | | $y$ = | — 384 |
| *c* | $x$ = | — 642 | *d* | $x$ = | — 271 |
| | $y$ = | — 396 | | $y$ = | — 306 |
| *g* | $x$ = | — 126 | *h* | $x$ = | 91 |
| | $y$ = | — 265 | | $y$ = | — 203 |



Digitized by Google

$$m \begin{cases} x = -312 \\ y = -426 \end{cases} \quad n \begin{cases} x = -60 \\ y = -440 \end{cases} \quad p \begin{cases} x = 269 \\ y = -204 \end{cases}$$

$$q \begin{cases} x = 400 \\ y = -209 \end{cases} \quad v \begin{cases} x = 455 \\ y = 73 \end{cases} \quad s \begin{cases} x = -160 \\ y = 50 \end{cases}$$

$$aa' = 72 \qquad vv' = 27.$$

Ce résultat étant construit, nous traçons les grandes lignes auxquelles doivent se rattacher les détails des objets. Les dimensions des maisons seront comparées avec celles de la première, et la longueur relative des deux groupes nous aidera en outre à fixer la diminution perspective de leurs façades, en tenant compte de la diversité de formes et d'architecture qu'il nous conviendra de leur attribuer. Pour le reste, nous nous référons à nos observations générales du n° 214.

Digitized by Google

# APPENDICE.

## PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

### NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

220. La géométrie descriptive est une application des propriétés élémentaires des lignes et des surfaces, particulièrement de la théorie des plans, dont le but est de ramener à des opérations de géométrie plane les problèmes de géométrie aux trois dimensions. Ces opérations s'exécutent graphiquement, avec l'aide des divers instruments employés dans le dessin linéaire, à l'exclusion de tout calcul d'algèbre ou d'arithmétique; et l'exactitude des solutions dépend essentiellement du soin qu'on apporte au tracé des lignes. Cette science est opposée, sous ce rapport, à la géométrie analytique aux trois dimensions, dont les procédés relèvent du calcul; mais elle a cependant, par la nature de ses problèmes, la plus grande analogie avec cette belle création du génie de Descartes. L'une et l'autre dérivent aussi de la même idée mère, la détermination des points de l'espace par leurs distances à des plans, d'une position connue, ou par leurs projections sur ces plans, ce qui va être expliqué.

221. La *projection* d'un point sur un plan est le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan.

La projection d'une ligne est formée par les projections de ses divers points. Donc :

Si la ligne est droite, la projection est pareillement une droite, intersection du plan de projection avec le plan qui

Digitized by Google

contient toutes les perpendiculaires suivant lesquelles les points sont projetés : ce second plan est perpendiculaire au plan de projection, et se nomme le *plan projetant* de la droite considérée.

La projection d'une droite perpendiculaire au plan de projection se réduit à un point; et celle d'une droite parallèle au même plan est égale et parallèle à cette droite.

Si la ligne est courbe, sa projection est une courbe, intersection du plan de projection avec la surface cylindrique formée par les perpendiculaires abaissées de tous ses points.

Dans le cas où la courbe est plane, si son plan est perpendiculaire au plan de projection, sa projection est une droite, parce que la surface cylindrique se réduit à un plan; si les deux plans sont parallèles, la projection est une courbe égale à la proposée.

**222.** Un point est déterminé dans l'espace, dès qu'on donne ses projections sur deux plans de positions connues : on l'obtient par la rencontre des deux perpendiculaires suivant lesquelles on le suppose projeté.

Il en est ainsi d'une droite ou d'une courbe dont on assigne deux projections : on la détermine comme la rencontre des deux plans projetants ou des deux surfaces cylindriques projetantes. Un cas seul doit être excepté, celui où les deux projections sont en ligne droite, ce qui ne peut arriver qu'autant que cette ligne droite est perpendiculaire à l'insersection des plans de projection. La courbe cherchée est alors contenue dans un plan perpendiculaire à cette intersection, et sa position reste indéterminée, parce que les deux plans projetants se confondent en un seul.

Une droite peut être donnée, dans les questions pratiques, par sa longueur, sa direction et la position de l'un de ses points; la direction de la droite est alors souvent dé-

Digitized by Google

terminée par la direction de sa projection horizontale et son inclinaison sur cette projection. Or, nous verrons comment on peut conclure de ces données les projections de cette droite sur deux plans, ou résoudre la question inverse, du moins en supposant les plans de projection dans les conditions du numéro suivant.

**223.** Dans l'emploi combiné de deux plans de projections, l'un d'eux est toujours horizontal, et l'autre vertical : leur intersection se nomme *ligne de terre*, parce que le premier représente assez fréquemment la surface d'un terrain. Quelquefois nous emploierons plusieurs plans verticaux avec un même plan horizontal, et chacun d'eux aura séparément sa ligne de terre. Les deux projections d'une ligne sur les deux plans se nomment respectivement projection *horizontale* et projection *verticale* de cette ligne, bien que la projection sur le plan vertical ait une direction inclinée sur l'horizon.

**224.** Un plan quelconque est déterminé dans l'espace, lorsqu'on donne ses traces sur deux plans de projections, c'est-à-dire les droites suivant lesquelles il coupe ces plans. L'un de ceux-ci étant horizontal et l'autre vertical, ces droites se nomment respectivement trace *horizontale* et trace *verticale*.

Si le plan donné est perpendiculaire au plan vertical de projections, sa trace horizontale est perpendiculaire à la ligne de terre, et sa trace verticale fait avec cette ligne un angle égal à l'inclinaison du plan sur l'horizon. L'inverse a lieu dans le cas où le plan donné est perpendiculaire au plan horizontal.

Si le même plan est parallèle au plan vertical, sa trace horizontale est parallèle à la ligne de terre, tandis que sa trace verticale n'existe plus qu'à l'infini ; et *vice versâ*.

Digitized by Google

Enfin, s'il est parallèle à la ligne de terre, ses deux traces sont parallèles à cette ligne.

Au lieu de donner les deux traces d'un plan, on assigne souvent sa position par sa trace horizontale et son inclinaison sur l'horizon. Mais il est facile, comme on le verra, de passer de ces données aux précédentes, et réciproquement.

Quant aux surfaces courbes, elles peuvent être données par les limites de leurs projections sur deux plans, ou par leurs traces sur ces plans ; mais il faut connaître en outre la loi de leur génération.

**225.** Ces premières notions nous permettent déjà d'indiquer sommairement les procédés généraux de la science qui nous occupe, et d'en faire comprendre l'utilité dans les applications pratiques.

Une question étant énoncée, de la nature de celles qui dépendent de ces procédés, qu'elle soit d'ailleurs du domaine de la perspective, de l'architecture, ou d'un art quelconque, pour la résoudre, on commence par faire un choix convenable d'un ou de plusieurs plans de projections, appropriés aux circonstances du problème et aux opérations qu'il doit exiger : ainsi, le plan horizontal est la base d'un édifice, d'une terrasse, etc., et l'on donne au plan vertical telle position que l'on juge favorable aux constructions. On projette, par la pensée, les points de l'espace sur ces plans, et l'on ramène, par les transformations qui peuvent être nécessaires, toutes les grandeurs géométriques données au mode de représentation supposé ci-dessus. Puis on imagine les opérations qui conduiraient à la solution, si on les effectuait directement sur les grandeurs proposées, et l'on en conclut les opérations correspondantes sur les plans de projections : il ne reste plus alors qu'à exécuter celles-ci pour obtenir le résultat cherché sur les mêmes plans, et par suite dans l'espace.

Digitized by Google

Mais les projections elles-mêmes ne sont encore qu'une conception de la théorie, qu'il s'agit de faire passer à l'état pratique. Voici comment on y parvient.

La feuille d'*épure*, ou la surface plane sur laquelle on travaille, est considérée généralement comme le plan horizontal de projections, celui que nous nommons *géométral*, dans les problèmes de perspective. On y construit, d'après une échelle de réduction arbitraire, les projections et toutes les lignes contenues dans ce plan, ainsi que la ligne de terre. Il serait difficile d'élever matériellement, suivant cette dernière ligne, le plan vertical de projections, lequel deviendrait d'ailleurs incommode pour l'opérateur; mais on y supplée, en concevant ce plan rabattu sur le plan horizontal, par un mouvement de révolution autour de la ligne de terre, et l'on construit toutes les lignes qu'il contient, rabattues de la sorte et conservant leurs positions relatives. On opère sur le plan horizontal et sur le rabattement du plan vertical, comme on le ferait sur ces plans s'ils étaient à angle droit, conformément à ce qui vient d'être dit; et le résultat étant trouvé, on restitue aux lignes qui déterminent sa grandeur ou sa position, les dimensions de l'espace.

Dans nos applications pratiques de perspective, les points de l'espace étaient rapportés à trois plans invariables, et leurs positions déterminées en conséquence au moyen de leurs coordonnées. Il nous serait permis de rester fidèle à cette convention, mais en remarquant que les plans de projections seraient généralement distincts et tout à fait indépendants des plans coordonnées, parce qu'ils ne sont que des éléments secondaires du problème, de simples moyens employés pour atteindre le but plus aisément. Dans cette hypothèse, le plan horizontal de projections serait à une distance connue du plan d'horizon, et nous aurions dans le premier les traces du plan central et du plan normal.

Digitized by Google

Un point quelconque serait déterminé, dès que les constructions auraient donné ses projections sur le plan horizontal et sur un plan vertical, parce qu'il serait facile d'en conclure les valeurs de ses coordonnées.

On se trouve affranchi de la considération de plans invariables, tels que les précédents, toutes les fois que la question proposée dépend uniquement, par sa nature, des relations qu'ont entre eux les points de l'espace, et non de leur position absolue. Dans tous les cas, pour plus de généralité, nous en ferons abstraction.

Quelques remarques sont encore nécessaires pour compléter cette introduction aux problèmes spéciaux.

**226.** Soient (*fig.* 152) A et A′ les projections horizontale et verticale d'un point, et PQ la ligne de terre. Nous savons que le point A′ est le rabattement de la projection verticale réelle sur le plan horizontal. Or, ce rabattement doit être effectué dans un même sens pour tous les points considérés dans une même question. Si donc le point (A, A′) est au-dessus du plan horizontal, et qu'un second point (B, B′) soit au-dessous de ce plan, la projection verticale A′ sera d'un côté de la ligne de terre, tandis que la projection verticale B′ sera de l'autre côté. Mais on acquiert bientôt l'habitude de se figurer le plan vertical dans sa position réelle, ce qui facilite l'intelligence des constructions; dans ce cas, A′ sera au-dessus de la ligne de terre, et B′ au-dessous.

La droite A′IA, qui joint les deux projections d'un point, est perpendiculaire à la ligne de terre; car la projection verticale, en se rabattant, a décrit un quart de cercle dont le plan, perpendiculaire à PQ, passe par le point A. Donc, *les deux projections d'un point sont toujours situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

Deux points ne pouvant représenter les projections d'un

Digitized by Google

même point qu'à cette condition, il est facile de reconnaître si deux droites dont on donne les projections se coupent dans l'espace. Il faut et il suffit, pour leur intersection mutuelle, que la rencontre des projections horizontales et celle des projections verticales soient sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Quand cette condition n'aura pas lieu, les droites ne seront pas dans un même plan.

Observons enfin que, sur la perpendiculaire A'IA, la portion A'I mesure la distance du point de l'espace au plan horizontal, et IA la distance du même point au plan vertical.

**227.** Soient (*fig.* 153) LM et MN les deux traces d'un plan; ces traces se rencontrent nécessairement en un point de la ligne de terre PQ, puisque le plan considéré ne peut rencontrer cette ligne qu'en un seul point.

La trace verticale LM est le rabattement, sur le plan horizontal, de celle que l'on conçoit dans la position réelle du plan vertical; d'où il suit que l'angle LMN n'est pas égal à celui que comprennent les deux traces dans l'espace; mais l'angle QML, compris entre la trace verticale et la ligne de terre, n'a pas changé pendant le rabattement.

Les commençants doivent s'exercer à représenter des points, des droites et des plans, dans toutes les positions dont ils sont susceptibles à l'égard des plans de projections, par exemple, des droites situées, les unes au-dessus et les autres au-dessous du plan horizontal; ou bien, les unes d'un côté du plan vertical et les autres du côté opposé; ils pourront distinguer les projections verticales, en les désignant au moyen de lettres accentuées.

Digitized by Google

## § Ier.

### PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE ET LE PLAN.

**228.** *Une droite étant donnée par l'une de ses extrémités, sa longueur et sa direction, construire ses projections sur deux plans de projections donnés* (fig. 154).

Il est rare, dans la pratique, qu'une droite soit donnée de prime abord par ses projections sur deux plans, tandis qu'elle l'est souvent par les conditions énoncées ci-dessus. Or, on peut juger utile, pour certaines constructions ultérieures, de passer de l'une de ces formes à l'autre.

Nous supposerons, comme au n° 103, que la direction de la droite soit déterminée par son inclinaison sur sa projection horizontale et la direction de cette projection elle-même. Il est d'ailleurs toujours entendu qu'on spécifie le sens d'inclinaison.

Cela posé, soient (A, A′) l'extrémité donnée, AC la direction de la projection horizontale et PQ la ligne de terre. Nous construisons le rabattement A″B″ de la droite, tournant autour de sa projection horizontale; à cet effet, nous rabattons d'abord le point (A, A′), en prenant, perpendiculairement à AC, la distance AA″ égale à l'élévation du point A′ au-dessus de la ligne de terre; et nous tirons A″B″ ayant la longueur donnée, et formant avec AC, ou une parallèle à cette droite, un angle égal à l'inclinaison donnée. Ensuite, la droite B″B, menée perpendiculairement à AC, nous donne le point B, projection horizontale de la seconde extrémité; de là résulte sa projection verticale B′, située sur la perpendiculaire BB′ à la ligne de terre, à une hauteur au-dessus de cette ligne égale à B″B. Nous tirons enfin A′B′, projection verticale demandée.

Réciproquement, étant données deux projections d'une

Digitized by Google

droite, on obtiendrait sa véritable grandeur ou son inclinaison sur sa projection, en construisant le trapèze ABB″A″, et l'on aurait tous les éléments nécessaires à cette construction.

L'opération serait évidemment la même, si dans l'énoncé, et par suite dans les constructions, on substituait le plan vertical de projection au plan horizontal.

*Un plan étant donné par sa trace et son inclinaison sur un plan horizontal, construire sa trace sur un plan vertical de projections* (fig. 155).

229. L'utilité de ce problème s'explique par les mêmes raisons que celle du précédent.

Pour le résoudre, soient AB la trace horizontale du plan proposé et PQ la ligne de terre. Par un point quelconque A de AB, concevons un plan perpendiculaire à cette droite; il coupera le plan proposé et les deux plans de projections suivant trois lignes composant un triangle rectangle. Nous construisons le rabattement AGC′ de ce triangle, en tirant AG perpendiculaire à la trace, jusqu'à la ligne de terre, et AC′ formant l'angle C′AG égal à l'inclinaison donnée, jusqu'à la rencontre du côté GC′ de l'angle droit G.

Le point C′ est le rabattement du point où l'hypoténuse du triangle rencontre la trace verticale demandée. Nous relevons ce point en élevant perpendiculairement à la ligne de terre la droite GC égale à GC′. Le point C appartient en conséquence à cette trace, que nous obtenons en tirant BC.

Étant données les deux traces d'un plan, pour en conclure son inclinaison sur le plan horizontal, il suffirait évidemment d'intervertir l'ordre des constructions.

Digitized by Google

*Étant donné le rabattement d'une courbe plane sur le plan horizontal, construire les projections de cette courbe dans sa position primitive, et réciproquement* (fig. 156).

**230.** On suppose connues la trace horizontale du plan de la courbe et son inclinaison sur le plan horizontal dans sa position primitive, le rabattement s'étant effectué autour de cette trace.

Soient MN la trace donnée et PIR l'angle qui mesure l'inclinaison du plan, PI étant perpendiculaire à MN. Concevons suivant PI, considérée comme ligne de terre, un plan vertical de projections : IR sera la trace verticale du plan relevé et contiendra la projection verticale de tout point de la courbe relevée, en vertu de la perpendicularité supposée. Maintenant, pour relever un point quelconque A, nous abaissons la perpendiculaire AA″ sur la ligne de terre; du centre I nous décrivons l'arc A″A′ ; cet arc est la projection verticale de celui qui décrit le point A dans l'espace; donc il contient aussi la projection verticale de ce point, et dès lors sa rencontre A′ avec IR est cette projection.

La projection horizontale du même point doit se trouver, d'une part, sur la droite $AA_1$, perpendiculaire à MN, laquelle représente la projection horizontale du même arc, et, d'autre part, sur la droite $A'A_1$, abaissée du point A′ perpendiculairement à la ligne de terre; donc elle est la rencontre $A_1$ de ces deux lignes.

Il n'y a plus qu'à répéter l'opération sur autant d'autres points de la courbe que nous jugeons à propos d'en prendre.

En faisant passer un trait continu par toutes les projections horizontales $A_1$, $B_1$, $C_1$,..., nous décrivons la projection horizontale de la courbe, dont la projection verticale se réduit à une droite G′H′. Les limites G′ et H′

Digitized by Google

correspondent aux points G et H où les tangentes sont parallèles à la trace MN; les limites $B_1$ et $C_1$ de la projection horizontale correspondent aux points B et C où les tangentes sont perpendiculaires à la même droite, comme cela est évident. Une tangente AT à la courbe rabattue détermine la droite $TA_1$, tangente à la projection et projection de la tangente dans l'espace.

Si l'on appliquait l'opération à un cercle, on obtiendrait pour sa projection horizontale une ellipse, ayant son grand axe dirigé parallèlement à MN.

La question réciproque n'est pas plus difficile. Pour rabattre sur le plan horizontal une courbe plane, connaissant la trace horizontale et l'inclinaison de son plan, on effectuerait, à l'égard de chacun de ses points, une construction inverse.

Enfin, la manière d'opérer serait parfaitement identique, si au lieu d'une courbe on considérait un système quelconque de points ou de lignes contenus daus un plan.

Le problème que nous venons de résoudre est important par l'usage, pour ainsi dire, continuel qu'on en fait dans les applications pratiques. On pourrait même ajouter que, lorsqu'un élève intelligent s'est familiarisé avec le rabattement ou le relèvement des plans, s'il s'est fait en outre des idées vraies sur l'emploi des plans de projections, il est peu de problèmes de géométrie descriptive dont il ne puisse de lui-même trouver quelque solution.

*Construire l'intersection de deux plans* (fig. 157).

231. Lorsque deux plans sont donnés par leurs traces sur deux plans de projections, il est clair que leur intersection est la droite qui joint dans l'espace les intersections respectives des traces. Ainsi, soient AMB′, ANB′ deux plans donnés de la sorte, MN étant la ligne de terre : leur ligne d'intersection est la droite (AB, A′B′).

Digitized by Google

Si les plans sont donnés d'après les conditions plus ordinaires du n° 229, on peut construire préalablement leurs traces sur un plan vertical de projections pris à volonté, ce qui ramène à la construction précédente. Mais, dans ce cas, on pourrait également opérer d'une manière plus directe, par un procédé que l'on imaginera facilement et que je me dispense d'indiquer.

Il arrive souvent dans la pratique que l'un des plans considérés est celui de deux ou plusieurs droites dont les positions sont données. Alors on construit les rencontres de ces droites avec le second plan, suivant l'un des problèmes ci-après, et l'on n'a plus qu'à tirer une ligne de jonction.

C'est ainsi, par exemple, que l'ombre portée par une droite sur un plan est réellement l'intersection de deux plans; mais l'un de ces plans est déterminé par deux rayons de lumière dont il suffit de construire les rencontres avec le plan qui reçoit l'ombre.

*Construire la trace d'une droite dans un plan de projections.*

**232.** Soit d'abord (*fig.* 158) une droite (AB, A'B') donnée par ses projections sur deux plans. Nous prolongeons ces projections jusqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne de terre, l'une en D et l'autre en C'. Le point D est la projection horizontale du point où la droite rencontre le plan vertical de projections, et C' est la projection verticale du point où elle rencontre le plan horizontal. Les perpendiculaires D'D, C'C à la ligne de terre déterminent les projections horizontales C et D de ces points qui sont ainsi déterminés. La droite perce donc le plan vertical en (C, C') et le plan horizontal en (D, D').

Si la droite est donnée par sa direction et la position de l'une de ses extrémités, on obtient par un rabattement sa

Digitized by Google

trace sur le plan horizontal de projections. Soit (*fig.* 159) AB sa projection horizontale ; nous menons la perpendiculaire AA′ égale à l'élévation du point A, que nous supposerons être l'extrémité donnée, et la droite A′C faisant l'angle A′CA égal à l'inclinaison. A′C est le rabattement de la droite, et C le point où elle rencontre le plan horizontal.

*Construire la rencontre d'une droite et d'un plan.*

233. Si la droite est donnée par ses projections et le plan par ses traces sur deux plans de projections, on fait passer par la droite un plan perpendiculaire à l'un de ceux-ci, et l'on construit son intersection avec le plan proposé. La rencontre de cette ligne avec la droite donnée est le plan demandé.

Dans cette hypothèse, soient (AB, A′B′) et MNL la droite et le plan donnés (*fig.* 160). Un plan vertical conçu suivant la droite coupe ce plan suivant la droite (EC, E′C′), dont la projection verticale rencontre celle de la droite donnée en O′. Nous abaissons O′O perpendiculairement à la ligne de terre, jusqu'à la rencontre de la projection horizontale en O, et le point demandé est (O, O′).

Pour vérifier la construction, on peut faire passer par la droite un plan sécant perpendiculaire au plan vertical de projections. Son intersection avec le plan donné sera une droite telle que (DF, D′F′), dont la rencontre avec la proposée doit être le même point (O, O′).

Supposons maintenant que la droite et le plan soient donnés comme aux n^os 228 et 229. Nous prendrons un plan vertical de projections perpendiculaire au plan donné (1), et la construction rentrera dans la précédente.

---

(*) En général, je dispose des plans verticaux de projections de la manière qui conduit le plus simplement au but immédiat des problèmes



Digitized by Google

Soient (*fig.* 161) MN la trace horizontale de ce plan, dont il est censé que nous connaissons l'inclinaison, et AB la projection de la droite, son élévation au-dessus du point A étant également connue : nous tirons perpendiculairement à MN la ligne de terre PKQ d'un plan vertical de projections, et sa trace verticale KG, d'après la condition que l'angle PKG égale l'inclinaison du plan donné. Nous construisons aussi la projection verticale A'B' de la droite (228).

Cela posé, KG et A'B' se rencontrent en O', projection verticale du point demandé : sa projection horizontale O s'ensuit.

Cette solution est fondée sur ce que le plan donné, étant perpendiculaire au plan vertical de projections, est lui-même le plan projetant de toute ligne qu'il contient.

Il peut arriver que la droite soit située dans un plan perpendiculaire à la trace du plan donné. Dans ce cas, on simplifie la construction en faisant passer par la droite elle-même le plan vertical de projections, qui n'est plus qu'un plan de rabattement.

Ainsi, soit comme ci-dessus (*fig.* 162) AB la projection

---

énoncés, comme dans cette seconde solution. Je n'ignore pas les motifs qui portent les auteurs à en agir autrement : ces problèmes peuvent n'avoir qu'un emploi subsidiaire, et devenir ainsi les parties intégrantes d'une construction plus complexe, pour laquelle les plans de projections ont reçu des positions primitives. Mais, dans ce cas même, on ne saurait trouver de désavantage à résoudre chaque problème partiel avec les simplifications qu'il comporte quand il est isolé, puisqu'on en est quitte pour effectuer, à l'égard des résultats, quelques changements de plans verticaux.

Des méthodes moins abréviatives, mais d'une marche uniforme et si l'on veut plus générale, conviennent, il est vrai, aux études théoriques ; cependant, en conservant ces méthodes dans les traités spéciaux, ne pourrait-on du moins en montrer le but pratique et faire voir comment, pour l'atteindre, les procédés se diversifient suivant la nature infiniment variée des questions à résoudre? Le grave inconvénient des procédés uniformes est de rendre l'opérateur esclave d'un instrument qu'il doit maîtriser.

Digitized by Google

horizontale de cette droite. Nous construisons son rabattement A′B′ conçu par un mouvement de révolution autour de sa projection, et la rencontre O′ avec KG détermine encore le point (O, O′) qu'il s'agissait d'obtenir.

Le problème de l'intersection d'une courbe plane avec un plan se résout de la même manière : on construit l'intersection du plan de la courbe avec le plan donné ; la rencontre de cette droite avec la courbe est le point demandé.

*Mener par un point donné une perpendiculaire à un plan.*

234. Quand une droite est perpendiculaire à un plan, sa projection est perpendiculaire à la trace de ce plan sur un plan quelconque de projections ; car, le plan projetant de la droite, perpendiculaire à la fois au plan donné et au plan de projections, l'est nécessairement à leur ligne d'intersection, c'est-à-dire à la trace du plan donné : or, cette trace ne peut être perpendiculaire au plan projetant, sans l'être à la projection.

Donc, si le plan est donné par ses traces, et le point par ses projections sur deux plans de projections déterminés, on résout le problème en abaissant des projections du point des perpendiculaires respectives aux traces du plan ; elles représentent les projections de la perpendiculaire demandée.

Mais si le plan est donné par sa trace horizontale et son inclinaison, on construit l'intersection de ce plan avec un plan perpendiculaire à la trace donnée et passant par le point donné, et la perpendiculaire abaissée du même point sur cette intersection. Cette construction s'exécute au moyen d'un rabattement.

Ainsi, soient (*fig.* 163) MN la trace du plan et A la projection horizontale du point onné. Nous tirons la perpendiculaire AKB et formons l'angle BKG égal à l'incli-



Digitized by Google

naison du plan. KG est le rabattement de l'intersection du plan avec le plan vertical perpendiculaire à MN. Soit A′ le rabattement du point donné; nous abaissons la perpendiculaire A′O′, qui représente le rabattement de celle qui est demandée.

On peut considérer le plan de rabattement comme un plan vertical de projections; AO et A′O′ sont alors les deux projections de la perpendiculaire abaissée du point donné sur le plan.

Dans les applications pratiques, si l'on devait opérer pour un certain nombre de perpendiculaires à un même plan, on éviterait de construire plusieurs fois l'angle K, en projetant toutes les perpendiculaires sur un même plan vertical perpendiculaire à MN.

Les problèmes qui suivent, concernant encore la ligne droite et le plan, ne trouvent pas leur application dans nos opérations de perspective. Leurs solutions seront indiquées sans figures.

*Construire l'angle de deux droites.*

**235.** On construit les traces de ces droites dans le plan horizontal, et l'on tire une ligne de jonction qui représente la trace de leur plan.

On suppose que ce plan tourne autour de sa trace pour se rabattre sur le plan horizontal, et l'on construit le rabattement des droites. L'angle qu'elles comprennent, ainsi rabattu, est l'angle demandé.

*Mener par un point donné une perpendiculaire à une droite.*

**236.** On joint le point donné à un point quelconque de la droite donnée, par une seconde droite. On construit les traces des deux droites, et par suite, comme précédem-

Digitized by Google

ment, la trace du plan qu'elles déterminent. On rabat ce plan avec les lignes qu'il contient, et du rabattement du point on abaisse une perpendiculaire sur le rabattement de la droite donnée. On relève le plan et cette perpendiculaire, et le problème est résolu.

*Construire l'angle de deux plans.*

237. Par un point quelconque de l'espace, on mène une perpendiculaire à chacun des deux plans, et l'on construit l'angle de ces perpendiculaires. C'est le complément de l'angle demandé.

On peut encore faire passer, par un point quelconque de la ligne d'intersection des deux plans, un troisième plan perpendiculaire à cette ligne; construire les droites suivant lesquelles il les coupe, et enfin l'angle de ces deux droites. Mais cette construction n'est pas aussi simple que la précédente.

*Par un point donné, faire passer un plan perpendiculaire à une droite donnée.*

238. Du point donné on abaisse une perpendiculaire sur la droite, et l'on construit sa trace sur le plan horizontal : c'est un point de la trace du plan demandé. Par ce point on mène une perpendiculaire à la projection horizontale de la droite : c'est la trace horizontale de ce plan. Son inclinaison est le complément de l'inclinaison de la droite, et il est en conséquence déterminé.

Dans le cas où la droite est donnée par ses projections sur deux plans, on obtient de la même manière la trace horizontale; du point où elle rencontre la ligne de terre, on mène une perpendiculaire à la projection verticale : elle représente la trace verticale du plan demandé.

On peut encore mener par le point donné une parallèle

Digitized by Google

à la trace horizontale que doit avoir le plan demandé, parce que la direction de cette trace est connue d'avance. Cette parallèle est située dans ce plan ; on construit le point où elle perce le plan vertical de projections : c'est un point de la trace verticale du même plan ; cette trace est donc déterminée puisqu'elle doit être perpendiculaire à la projection verticale de la droite : la trace horizontale s'ensuit.

*Construire la plus courte distance de deux droites.*

239. La plus courte distance de deux droites données d'une manière quelconque dans l'espace se mesure par leur commune perpendiculaire. On l'obtient ainsi :

Soient A et B les droites données. On fait passer par la droite A un plan parallèle à la droite B, ce qui se réduit à mener par un point quelconque de A une parallèle à B, et à construire le plan que détermine la première droite avec cette parallèle. La distance de B à ce plan est la plus courte distance des deux droites, mais il ne suffit pas d'avoir sa valeur absolue ; on demande la position de la perpendiculaire commune aux deux droites.

En conséquence, nous concevons passer par la droite B un plan perpendiculaire au plan qui vient d'être déterminé, et nous contruisons la ligne suivant laquelle il le coupe. Cette ligne doit être parallèle à B, et il suffit donc, pour l'obtenir, d'abaisser d'un point quelconque de B une perpendiculaire sur le plan, et de mener par son extrémité une parallèle B′ à cette droite : elle rencontre la droite A en un certain point, duquel nous abaissons une perpendiculaire K sur B : c'est la perpendiculaire demandée.

En effet, la droite K est contenue dans le plan que nous avons fait passer par B ; d'une autre part, elle est perpendiculaire à B′, puisqu'elle l'est à B ; elle ne peut donc être contenue dans l'un des plans dont B′ est l'intersection, san

Digitized by Google

l'être à l'autre, c'est-à-dire sans l'être au plan que nous avons fait d'abord passer par la droite A; donc enfin elle est perpendiculaire à cette droite, et représente la perpendiculaire commune aux deux proposées.

Il ne reste plus qu'à déterminer sa véritable grandeur par un rabattement.

Nous pourrions nous proposer encore beaucoup d'autres problèmes sur la ligne droite et le plan; examiner aussi les cas particuliers dans lesquels les constructions se simplifient ou doivent être modifiées. Mais à cet égard, ce qui précède suffit pour mettre sur la voie des solutions, et de nouveaux détails sortiraient des limites que nous nous sommes tracées.

## § II.

### INTERSECTIONS DE SURFACES COURBES PAR DES PLANS.

**240.** Les intersections de surfaces courbes par des plans sont les opérations les plus usitées de la géométrie descriptive. On les obtient par les moyens suivants :

Quelle que soit la surface proposée, il arrive toujours qu'on obtient aisément ses intersections par des plans satisfaisant à des conditions particulières, selon la nature ou la position de la surface, des plans horizontaux par exemple; dès lors, on conçoit une suite de plans dans ces conditions, et l'on construit pour chacun d'eux les lignes suivant lesquelles il coupe à la fois la surface courbe et le plan proposé : les rencontres respectives de ces lignes sont autant de points de la ligne d'intersection demandée. On les détermine par les rencontres des projections, ou par des rabattements, selon les circonstances du problème.

La méthode consiste donc à ramener le cas général à une suite de cas particuliers pour lesquels l'opération est plus facile.

Digitized by Google

Ordinairement, le résultat immédiat de l'opération est de donner les projections d'un nombre suffisant des points de la courbe cherchée sur le plan horizontal de projections, avec leurs élévations au-dessus de ce plan, ou leurs projections sur un plan vertical. En faisant passer un trait continu par ces projections, on achève la projection de la courbe dont on peut avoir besoin pour des opérations ultérieures; en rabattant le plan sécant sur le plan horizontal, on obtiendrait la courbe elle-même, telle qu'elle existe dans l'espace. Toutes les fois que le plan sécant est vertical, on simplifie la construction en prenant un plan vertical de projection parallèle, et l'on y trouve l'avantage d'obtenir une projection verticale égale à la courbe dans l'espace.

Pour un cône, un cylindre, ou toute autre surface réglée, on fait passer les plans sécants par les arêtes de la surface, ou plutôt l'opération se réduit à construire les rencontres d'un certain nombre de ces droites avec le plan donné, ce qui se rapporte au problème du n° 233. Mais on peut aussi les traiter comme des surfaces de révolution, lorsqu'elles rentrent dans cette catégorie.

Pour une surface de révolution, ayant son axe vertical, on conçoit une série de plans horizontaux. Les sections sont des cercles, leurs projections horizontales d'autres cercles respectivement égaux aux premiers, et l'on détermine facilement leurs rencontres avec les sections faites dans le plan donné.

Si la position de la surface est quelconque, on coupe encore par des plans perpendiculaires à son axe, et l'on rabat les sections sur un plan de projections, afin de déterminer les mêmes points de rencontre.

Prenons maintenant quelques exemples, dans lesquels les cônes et les cylindres seront supposés droits, à bases circulaires.

Digitized by Google

*Construire la trace d'un cylindre, ou de son prolongement, dans un plan horizontal de projection* (fig. 164).

**241.** Soient CG, DH les droites qui limitent la projection horizontale du cylindre. Nous prenons un plan vertical de projection parallèle aux génératrices, dont la ligne de terre PQ soit en conséquence parallèle à CG; soit dans cette hypothèse E'A'B'F' la projection verticale de la surface : A'B' sera perpendiculaire aux droites A'E', B'F', et représentera la projection verticale de la base ; un cercle décrit sur ce diamètre sera égal à cette base : il est la projection de cette base, si l'on suppose qu'elle soit devenue parallèle au plan vertical de projection, en tournant autour du diamètre parallèle à ce plan.

Nous traçons un plan quelconque LMN parallèle à la génératrice et perpendiculaire au plan vertical; il coupe la surface suivant deux arêtes, et la base en deux points qui se projettent en O', mais dont les rabattements se projettent en K et K'. Nous obtenons les projections horizontales de ces derniers points, en abaissant, perpendiculairement à la ligne de terre, la droite $O'O_1O$, et prenant sur cette droite, au-dessus et au-dessous de JI, deux distances égales à OK. Des parallèles à GA, menées par $O_1$ et O, sont les projections horizontales des deux arêtes, suivant lesquelles le plan LMN coupe le cylindre, et les points R, T, où ces arêtes rencontrent le plan horizontal, appartiennent à la trace de la surface.

Cette trace est une ellipse dont nous obtiendrons les sommets U, V, au moyen de deux plans menés semblablement par A' et B', et les extrémités du petit axe XY, à l'aide d'un nouveau plan passant par I'.

Digitized by Google

*Construire la trace d'un cône dans un plan horizontal de projection* (fig. 165).

**242.** Soient (S, S′) le sommet du cône, A′S′B′ sa projection sur un plan vertical parallèle à son axe, et (I, I′) le centre de sa base : le cercle A′KB′ est, comme dans le cas du cylindre, la projection du rabattement de la base, autour de l'un de ses diamètres ; un plan quelconque S′MN, perpendiculaire au plan vertical de projection, et passant par le sommet du cône, coupe cette surface suivant deux arêtes qui rencontrent la base en deux points (O, O′), ($O_1$, O′), que nous obtenons encore comme précédemment, en abaissant du point O′ une perpendiculaire sur SI, et portant au-dessus et au-dessous de la rencontre une longueur égale à la droite O′K élevée perpendiculairement à A′B′. Les arêtes (SO, S′O′), (S$O_1$, S′O′), ainsi déterminées, percent le plan horizontal en des points R, T de la trace demandée.

Deux plans menés par les droites S′A′, S′B′ déterminent les sommets de l'ellipse U et V, et celui que l'on ferait passer par le milieu de UV donnerait les extrémités du petit axe.

*Intersection d'un cylindre vertical par un plan* (fig. 166).

**243.** Nous prenons un plan horizontal de projection passant par la base du cylindre, et un plan vertical perpendiculaire au plan sécant donné. Dans ces hypothèses, soient ACB cette base, A′E′F′B′ la projection verticale de la surface, et LMN le plan donné, coupant la projection verticale suivant GH. La courbe d'intersection se trouve toute construite, puisque ses projections sont connues, savoir ABC et GH. Cependant, pour obtenir la position de chacun de ses points, on peut supposer la surface coupée par une suite de plans horizontaux ; l'un d'eux, tel que RS, donne les points (O, O′), ($O_1$, O′).

Digitized by Google

La figure représente le rabattement de la courbe sur le plan horizontal ; elle indique aussi quels sont les plans sécants qui déterminent les extrémités des axes de cette courbe, ce qui se comprend à la première vue. L'opération est même tellement simple, qu'on pourrait en faire un moyen d'obtenir une ellipse, dans les cas où l'on a besoin d'une courbe de cette nature. Au reste, si l'on suppose que le plan sécant passe par le centre de la base, ce mode de description de l'ellipse coïncide avec un de ceux qu'on enseigne dans les traités de géométrie analytique.

*Intersection d'un cylindre incliné par un plan* (fig. 167 *et* 168).

**244.** *Première méthode.* Supposons donnée la trace de la surface dans un plan horizontal, qui sera pris pour plan de projection. Les lignes étant aussi projetées sur un plan vertical parallèle à la génératrice, soient (*fig.* 167) ACB la trace donnée, A′E′ et B′F′ les droites qui limitent la projection verticale du cylindre, et LMN le plan donné. Concevant une suite de plans sécants parallèles à la génératrice et perpendiculaires au plan vertical, soit G′H′H un de ces plans ; il coupe le cylindre suivant les droites (TU, G′H′), (VW, G′H′), le plan donné suivant la droite (GH, G′H′), et les rencontres (R, R′), (S, S′) des deux premières avec la seconde appartiennent à la courbe demandée.

Le cylindre étant supposé droit, à base circulaire, la courbe donnée doit être une ellipse ayant son grand axe parallèle à la ligne de terre. Un plan sécant, passant par le centre de cette courbe, détermine les points particuliers dont les projections horizontales sont sur les limites de la projection horizontale de la surface ; ceux que l'on conçoit suivant E′A′ et F′B′ donnent les points qui se projettent verticalement sur les mêmes droites.

Digitized by Google

La construction serait aussi simple si l'on supposait le plan vertical de projection perpendiculaire au plan donné; mais, en le prenant parallèle à la génératrice, on construit plus immédiatement la projection verticale du cylindre, connaissant son inclinaison sur l'horizon.

*Seconde méthode.* Considérons un cylindre donné par la position du cercle qui forme sa base dans l'espace, ce qui est le cas ordinaire de la pratique. Nous pourrions ramener l'opération à la précédente, en construisant la trace de la surface, ou de son prolongement, dans un plan horizontal (**241**). Mais il est préférable d'opérer directement.

A cet effet, soient (*fig.* 168) E'A'B'F' la projection du cylindre sur un plan vertical parallèle à la génératrice; CG et DH les droites qui limitent sa projection sur un plan horizontal. Nous coupons encore, comme précédemment, par une suite de plans parallèles à la génératrice et perpendiculaires au plan vertical. Soit G'H'H un de ces plans : il coupe le plan donné suivant une droite, et le cylindre suivant deux autres droites, dont les rencontres (R, R') et (S, S') avec la première sont autant de points de la courbe cherchée.

*Intersection d'un cône vertical par un plan* (fig. 169).

**245.** La courbe d'intersection demandée peut s'obtenir au moyen d'une suite de plans sécants, se croisant par l'axe supposé vertical de la surface : chacun d'eux la couperait, en même temps que le plan donné, suivant des droites dont les rencontres respectives appartiendraient à cette courbe. Mais quelque simple que soit ce mode de construction, il est préférable de traiter le cône comme surface de révolution.

Soient en conséquence ACB la base, dont le plan est pris pour plan horizontal de projection; A'S'B' le triangle qui

Digitized by Google

limite la projection de la surface sur un plan vertical perpendiculaire au plan donné; LMN ce dernier plan. La surface devant être coupée par une suite de plans horizontaux, soit T′R′ la trace verticale de l'un d'eux; les sections dans le cône et dans le plan donné sont un cercle et une droite, dont les projections horizontales se coupent aux points E, F, projections des deux points de la courbe cherchée; ces points ont une même projection verticale E′.

La projection horizontale de cette courbe est une ellipse, sa projection verticale se réduit à la droite GH. Deux plans sécants menés par G et H, et un autre par le milieu de GH, donneront les extrémités des axes de l'ellipse.

*Intersection d'un cône incliné par un plan.*

246. On prendra un plan vertical de projection parallèle à l'axe du cône, auquel on suppose une direction quelconque, et la construction sera parfaitement analogue à ce qu'on a vu pour l'intersection d'un cylindre incliné, soit que l'on connaisse la trace de la surface dans un plan horizontal, ou la position de sa base dans l'espace: dans ce dernier cas, les arêtes du cône, déterminées par les plans sécants que l'on fera passer par son sommet perpendiculairement au plan vertical, se construiront comme celles du n° 242, où il s'agissait de l'intersection de la surface par un plan horizontal.

*Intersection d'un tore par un plan* (fig. 170).

247. Le plan donné et l'axe du tore sont upp osés verticaux. Soient ACB, DFE les cercles qui limitent la projection de la surface sur un plan horizontal quelconque; B′A′K′ sa projection sur un plan vertical parallèle au plan sécant; MN la trace horizontale de ce dernier plan. Nous menons une horizontale telle que T′R′, représentant la

Digitized by Google

trace verticale d'un plan sécant perpendiculaire à l'axe ; la section dans le tore se compose de deux cercles des diamètres TR et PQ, dont les rencontres avec MN déterminent les points (U,U'), (V,V'), (X, X'), (Y,Y') de la courbe demandée.

Cette courbe est égale à sa projection verticale. Un plan passant par A'B' donne les points (G,G'), (H,H') où les tangentes sont verticales : deux autres plans coupant suivant les cercles dont la projection horizontale est un même cercle tangent à MN, déterminent les points où les tangentes sont horizontales, savoir (L, L'), (L, O').

*Intersection d'un ellipsoïde de révolution par un plan* (fig. 171).

**248.** L'ellipsoïde et le plan sont de positions quelconques. Soient AB la projection horizontale de l'axe de révolution ; A'C'B'D' l'ellipse suivant laquelle la surface se projette sur un plan vertical parallèle à cet axe ; LMN le plan donné. Devant employer un système de plans sécants perpendiculaires à la même droite, supposons que l'un d'eux soit G'H'H, dont la trace verticale rencontre l'ellipse en R et S. Ce plan coupe la surface suivant le cercle dont la projection verticale est RS, et le plan donné suivant la droite (GH, G'H'). Nous rabattons le cercle et la droite sur le plan horizontal par un mouvement de révolution autour de HH', et les points $T_1$, $U_1$, où ils se rencontrent ainsi rabattus, sont les rabattements de deux points de la courbe cherchée : nous les relevons et obtenons (T,T'), (U,U').

La construction par laquelle on détermine l'intersection de deux plans doit être effectuée seulement pour le premier des plans sécants ; les droites suivant lesquelles ils coupent le plan donné étant parallèles ainsi que leurs rabattements,

Digitized by Google

il suffira, pour un second plan tel que K'O'O, de mener OJ parallèle à HG, et $OJ_1$ parallèle à $HG_1$. Les rencontres $V_1$, $W_1$ de $OJ_1$ avec le rabattement du cercle correspondant donneront les deux nouveaux points (V, V'), (W, W').

Remarquons encore que tous les cercles rabattus ont leurs centres situés sur AB ou son prolongement, et que deux sections également distantes du centre de l'ellipsoïde, telles que RS et PQ, ont leurs rabattements symétriques par rapport au rabattement de la section qui passe par le centre. L'un des deux premiers peut donc se conclure immédiatement de l'autre.

*Intersection d'une vis à filet triangulaire par un plan* (fig. 172).

**249.** L'axe de la vis et le plan sécant seront supposés verticaux. Soient ABC, $\alpha\beta\gamma$ les cercles de projections des deux hélices sur un plan horizontal; MN la trace du plan sécant. Nous prenons un plan vertical de projections parallèle à MN, et nous y construisons les projections des deux hélices, au moyen de la hauteur spirale ou du pas de la vis, qu'on suppose connue : à cet effet, il suffit d'observer que, si l'on prend sur ces courbes des points dont les projections horizontales divisent les deux cercles en vingt-quatre parties égales par exemple, les hauteurs des projections verticales croissent uniformément d'un vingt-quatrième de la hauteur spirale. D'ailleurs, pour deux points tels que ceux qui se projettent en F' et $\varphi'$, situés sur une même génératrice de la surface, la différence des élévations est une demi-hauteur spirale.

Cela posé, considérons d'abord la section faite dans la portion de surface contiguë à l'arc d'hélice (ABC, A'B'C') et située au-dessus; une génératrice quelconque telle que ($F\varphi$, $F'\varphi'$) rencontre le plan sécant en un point (R, R'),

Digitized by Google

que nous obtenons en élevant du point R, rencontre de la projection horizontale avec MN, la droite RR′ perpendiculaire à la ligne de terre, jusqu'à la projection verticale. La même opération, répétée pour un nombre suffisant d'autres points, donne la ligne P′R′S′T′U′V′Q′, projection verticale de la courbe demandée, ou cette courbe elle-même, puisqu'elle doit être égale à sa projection. La droite PX représente sa projection verticale.

La construction est en défaut quand il s'agit d'obtenir le point (T, T′) situé en projection verticale sur l'axe de la surface, parce que la verticale élevée du point T se confond avec la projection de la génératrice. On élude la difficulté en faisant tourner d'un quart de révolution autour de l'axe la génératrice et le plan sécant, comme la figure l'explique suffisamment. On doit employer le même artifice pour les points voisins du précédent, c'est-à-dire pour ceux dont les projections verticales seraient déterminées par des intersections sous des angles trop aigus au moyen du premier procédé.

La section faite dans la portion de surface située au-dessous du même arc d'hélice se construit semblablement par la considération des arêtes telles que (Eε, E′ε′). Elle est égale à la première, mais de position inverse.

On obtiendrait sans plus de difficulté l'intersection de la vis par un plan incliné ou horizontal, l'opération se réduisant toujours à déterminer les rencontres des arêtes de la surface avec le plan proposé.

Digitized by Google

## § III.

### INTERSECTIONS D'UNE LIGNE ET D'UNE SURFACE COURBE.

250. Étant données une ligne droite et une surface courbe, dont on demande les points d'intersection, on fait passer par cette ligne un plan quelconque et l'on construit la section faite par ce plan dans la surface : les rencontres de cette courbe avec la ligne donnée sont les points demandés. Dans ce problème comme dans tous ses analogues, on emploie suivant les circonstances les projections des lignes ou leurs rabattements. Ordinairement, le plan sécant est supposé vertical, et l'on fait usage d'un plan de projections parallèle.

La construction est la même pour une courbe plane substituée à la ligne droite, pourvu que le plan sécant soit celui de cette courbe.

Si la ligne du problème est à double courbure et située sur une surface donnée, on construit la courbe d'intersection de cette seconde surface avec la première, en appliquant des méthodes exposées ci-après; les rencontres de cette courbe avec la proposée satisfont à la question. On ramène à cette hypothèse le cas où une ligne à double courbure est donnée d'une manière quelconque dans l'espace, au moyen de la loi de sa génération, en faisant passer par cette ligne une surface courbe, d'ailleurs arbitraire, par exemple une surface cylindrique.

Quelque simple que soit la construction, particulièrement dans le cas où la ligne est plane, nous en prendrons un exemple.



Digitized by Google

*Intersection d'une droite et d'un tore* (fig. 170).

251. Nous supposerons que le tore ait son axe vertical et soit le même que celui du n° 247. Un plan vertical de projections étant pris parallèle à la droite donnée, soit (MN, M'N') cette droite. Concevant suivant MN un plan vertical, nous construisons la projection verticale de la section faite par ce plan dans la surface; ses rencontres I', J', avec M'N', déterminent les points demandés (I, I'), (J, J'). Le problème pourrait avoir quatre solutions, mais il n'en aurait aucune, dans le cas où la projection verticale de la section ne serait pas rencontrée par PQ.

Si la droite proposée était verticale, on ferait passer le plan sécant par l'axe de la surface, et la section se réduirait au cercle générateur.

Si elle était horizontale, on prendrait le plan sécant également horizontal, et la section se composerait de deux cercles concentriques faciles à construire.

## § IV.

### INTERSECTIONS MUTUELLES DES SURFACES COURBES.

252. On obtient la ligne de pénétration mutuelle de deux surfaces courbes, par le même mode d'opération que l'intersection d'une surface de cette espèce par un plan; c'est-à-dire que l'on coupe par une série de plans choisis dans les conditions les plus favorables, et l'on construit les rencontres respectives des sections. La courbe demandée est généralement à double courbure et à plusieurs branches.

Si l'une des deux surfaces est un cône ou un cylindre, on fait passer par ses arêtes des plans ordinairement verticaux, et l'on construit les rencontres de ces droites avec les sections qu'on obtient dans la seconde surface : ce procédé

Digitized by Google

revient à construire les rencontres d'un système de droites données avec une surface courbe. Mais dans le cas où la seconde surface serait une sphère, on pourrait encore employer des plans sécants parallèles à la base du cône ou du cylindre, si cette base était circulaire, parce que les sections dans les deux surfaces proposées seraient des cercles.

Pour deux surfaces cylindriques, on prend les plans sécants parallèles aux génératrices, afin que les sections soient des droites. Pour un cône et un cylindre, on les fait passer par la droite menée du sommet du cône parallèlement aux arêtes du cylindre, les sections devenant encore rectilignes.

Dans les exemples suivants, les cônes et les cylindres sont, comme précédemment, supposés droits, à bases circulaires.

*Intersection d'un cône et d'une sphère* (fig. 172).

253. L'axe du cône est supposé vertical. Nous prenons en conséquence un système de plans sécants horizontaux, et un plan vertical de projections parallèle à celui qui doit diviser symétriquement la courbe de pénétration. Soient, dans ces hypothèses, (S, S′) le sommet du cône; ACB, A′S′B′ les projections horizontale et verticale de cette surface; GKH, G′F′H′ celles de la sphère, et MN la trace verticale d'un plan sécant : les sections sont des cercles en projections horizontales comme dans l'espace, et les rencontres U,V de ces projections déterminent les points (U,U′), (V,U′) de la courbe demandée. Cette courbe n'est qu'à une seule branche dans les données que suppose la figure.

Les points (R,R′), (T,T′), situés en projections verticales sur S′B′, ont leurs projections horizontales sur le diamètre AB parallèle à la ligne de terre et s'obtiennent à priori.

Les points situés en projections horizontales sur le cercle



Digitized by Google

GKH se déterminent au moyen d'une section faite par le diamètre horizontal G'H'.

Si l'axe du cône était incliné sur l'horizon, on ferait passer les plans sécants par son sommet, suivant ce qui a été dit précédemment; ou bien, on les prendrait encore perpendiculaires à cette droite, et l'on construirait les rencontres des sections par des rabattements.

*Intersection de deux cylindres horizontaux* (fig. 174).

254. Nous projetons les surfaces respectivement sur deux plans verticaux parallèles à leurs génératrices, indépendamment des projections sur le plan horizontal. Soient MN, *mn* les lignes de terre; AE et BF, C'P' et D'Q' les droites qui limitent les deux projections de la première; *ae* et *bf*, *c'p'* et *d'q'* les droites analogues pour la seconde. Les plans sécants, devant être parallèles aux deux génératrices, seront horizontaux: soient GH et *gh* les traces de l'un d'eux dans les deux plans verticaux, de sorte que ces droites soient respectivement à une même distance des lignes de terre. Ce plan coupe les surfaces suivant des droites que nous obtenons comme au n° 241. Leurs projections horizontales se rencontrent en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, d'où résultent les points $(\alpha, \alpha')$, $(\beta, \beta')$, $(\gamma, \gamma')$, $(\delta, \delta')$ de la courbe cherchée.

Celui des plans sécants qui passe par $c'p'$ donne les deux points $(\varepsilon, \varepsilon')$, $(\varphi, \varphi')$, les plus élevés de cette courbe, parce que l'arête $(cp, c'p')$ est la plus élevée sur le cylindre pénétrant. Le plan passant par D'Q' donne les points les plus bas $(\tau, \tau')$, $(\omega, \omega')$, la courbe n'ayant qu'une branche dans les données de la figure. Deux nouveaux plans menés par A'E' et $a'e'$ déterminent, d'une part, les quatre points de contact de la projection horizontale de la courbe avec AE, BF, et, d'une autre part, les quatre points analogues sur *ae*, *bf*.

Digitized by Google

On voit que les deux plans verticaux de projection ont servi à déterminer la projection horizontale de la courbe cherchée; mais il a suffi de construire sa projection verticale sur l'un ou l'autre de ces plans.

*Intersection de deux cylindres inclinés sur l'horizon.*

255. *Première méthode.* On suppose données ou l'on construit préalablement (241) les traces des deux cylindres dans le plan horizontal de projections, et les limites de leurs projections sur un plan vertical. Par un point quelconque de l'espace on mène deux parallèles aux génératrices, déterminant un plan parallèle à ces droites. Des parallèles à la trace horizontale de ce plan représentent les traces des plans sécants; leurs rencontres avec la trace de chaque surface sont elles-mêmes les traces des arêtes d'intersection, dont la position et par suite les rencontres mutuelles sont ainsi connues.

C'est, en effet, sous cette forme qu'on est dans l'usage de présenter la solution du problème, parce que l'on suppose données les traces horizontales des deux surfaces; mais cette dernière hypothèse se trouve rarement justifiée dans la pratique, et nous préférerons en conséquence opérer de la manière suivante.

*Seconde méthode* (fig. 175). Chaque cylindre sera projeté sur le plan horizontal et sur un plan vertical parallèle à sa génératrice. Soient dans cette hypothèse MN et *mn* les lignes de terre; AE et BF, *ae* et *bf* les droites qui limitent les projections horizontales des deux surfaces; C'P'Q'D', *c'p'q'd'* leurs projections verticales respectives; H'K, *h'k* les traces horizontales des plans des deux bases. Les plans verticaux se coupent suivant une droite sur laquelle nous prenons un point quelconque représenté par V ou par *v*, selon que nous le considérons dans l'un ou

Digitized by Google

l'autre de ces plans. Un plan mené par ce point parallèlement aux deux cylindres a ses traces verticales VT, $vt$ respectivement parallèles aux projections verticales des génératrices, et sa trace horizontale T$t$ s'ensuit : il coupe les surfaces suivant des arêtes qu'il s'agit de construire, leurs rencontres mutuelles devant appartenir à la courbe de pénétration demandée.

Or, ces arêtes seront connues, dès que nous aurons les points des bases où elles aboutissent. Nous déterminerons ces derniers points comme les rencontres des circonférences des bases avec les droites suivant lesquelles le plan sécant VT$tv$ coupe les plans de ces courbes, et nous y parviendrons, comme dans tous les cas analogues, par des rabattements. A cet effet, nous observerons, en ce qui concerne la première surface, que H'K, la trace horizontale du plan de sa base, rencontrant en H la trace T$t$ du plan sécant, et les traces verticales de ces deux plans se coupant en G', leur intersection est la droite (GH, G'H'). Le rabattement $G_1H$ de cette droite, effectué autour de H'H, rencontre la base également rabattue en deux points $R_1$ et $S_1$ : ce sont les rabattements des points de la base où doivent passer les arêtes d'intersection, lesquelles se trouvent en conséquence déterminées. Les projections horizontales de ces droites doivent être menées par $R_1$, $S_1$ ; et les projections verticales par les rencontres de C'D' avec les arcs de cercle qui servent à relever ces points. On pourrait encore relever les mêmes points en élevant des perpendiculaires à la ligne de terre des rencontres de GH avec les projections horizontales des arêtes d'intersection.

Nous obtenons par une construction semblable les arêtes d'intersection du même plan sécant avec le second cylindre, ou seulement leurs projections horizontales : ces projections coupent les précédentes en quatre points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, d'où résultent les quatre points ($\alpha$, $\alpha'$), ($\beta$, $\beta'$), ($\gamma$, $\gamma'$),

Digitized by Google

($\delta$, $\delta'$) de la courbe de pénétration demandée. Les projections $\alpha'$, $\beta'\gamma'$, $\delta'$ sont construites seulement sur le premier plan vertical ; en les construisant sur le second, on les trouverait situées respectivement aux mêmes distances de la ligne de terre.

Les plans sécants devant être parallèles entre eux, leurs intersections avec les plans des bases seront parallèles, et il en sera de même des rabattements de ces droites. La construction exécutée pour la première section est en conséquence susceptible de s'abréger à l'égard des suivantes. Ainsi, une droite telle que $X_1Y_1$, parallèle à $R_1S_1$, représente le rabattement de l'intersection d'un nouveau plan sécant avec le plan de la base du premier cylindre ; par sa rencontre L avec H'K, nous tirons parallèlement à T$t$ la droite LJ, qui est la trace horizontale de ce nouveau plan ; par sa rencontre J avec la trace $h'k$ du plan de la base du second cylindre, nous tirons parallèlement à $r_1s_1$ la droite $Jx_1y_1$, rabattement de l'intersection de ce dernier plan avec le plan sécant. Il est clair que nous aurions pu commencer par nous donner cette dernière droite et effectuer la même opération dans un ordre inverse.

Les plans sécants ne conviennent au problème qu'autant qu'ils coupent à la fois les deux surfaces : ils ont pour limites ceux qui sont tangents à l'une d'elles et coupent l'autre, c'est-à-dire ceux dont les intersections avec les plans des bases sont, dans les rabattements, tangentes à l'une de ces courbes et sécantes pour l'autre. On peut donc obtenir ces limites à priori, en menant ces tangentes et opérant ensuite comme ci-dessus. Dans les données particulières que suppose la figure, des tangentes menées au premier cercle donnent des sécantes pour le second, d'où nous concluons que le premier cylindre pénètre totalement le second et que la courbe d'intersection est à deux branches.

Enfin, on comprendra tout aussi facilement comment

Digitized by Google

peuvent s'obtenir les points de cette courbe situés sur l'une quelconque des arêtes de chaque cylindre déterminée à priori, et notamment ceux qui se projettent sur les limites des projections horizontales ou verticales des deux surfaces.

*Intersection d'un cône et d'un cylindre* (fig. 176).

256. Les arêtes du cylindre et l'axe du cône sont supposés horizontaux et à angles droits. Le plan de la base même du cône étant pris pour plan vertical de projections, soient ABS, MNLK les limites des projections horizontales des deux surfaces; A'C'B'D' la base du cône dans le plan vertical, et E'F'G'H' la projection verticale du cylindre. Nous prenons un système de plans sécants perpendiculaires à l'axe du cône, et nous supposons que TR soit la trace horizontale de l'un d'eux. Ce plan coupe le cylindre suivant deux arêtes, le cône suivant un cercle, et les projections verticales de ces lignes se rencontrent en $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$, d'où résultent les quatre points $(\alpha, \alpha')$, $(\beta, \beta')$, $(\gamma, \gamma')$, $(\delta, \delta')$ de la courbe demandée.

Le plan sécant conduit suivant EF donne les points situés en projections verticales sur E'F' et G'H'; les plans passant par MN et KL déterminent ceux qui se projettent verticalement sur M'N'. On obtient enfin les points qui se projettent horizontalement sur SA, SB, et verticalement sur A'B', en prolongeant cette dernière droite et effectuant dans un ordre inverse la construction qui a donné les premiers points.

Dans les données de la figure, la courbe de pénétration est à deux branches; ces branches sont d'ailleurs symétriques dans l'espace, en vertu de la perpendicularité de l'axe du cône avec la génératrice du cylindre; elles le sont aussi en projection, d'après la disposition particulière des plans de projections à l'égard des surfaces proposées.

Digitized by Google

## § V.

### POINT D'INTERSECTION DE TROIS SURFACES.

**257.** Trois surfaces qui se pénètrent mutuellement se rencontrent toutes les trois en quelques points. On détermine leurs communes intersections, comme les rencontres des lignes suivant lesquelles les surfaces se pénètrent deux à deux. Il suffit d'ailleurs de combiner une seule des surfaces avec chacune des deux autres, et de construire ainsi seulement deux lignes de pénétration. Celle des deux dernières, si on la construisait, servirait à vérifier le problème, puisque les trois lignes devraient toutes se couper aux mêmes points.

Quand on prend trois surfaces de l'ordre des cônes, des cylindres ou de la sphère, et généralement de celles qui sont dites *du second degré*, le problème peut avoir huit solutions; il en aurait quatre au plus pour deux surfaces de cet ordre et un plan; deux pour une telle surface et deux plans; enfin une seule pour trois plans.

Dans tous les cas, l'opération se ramenant à ce qui précède, nous nous dispensons d'en prendre des exemples.

## § VI.

### PLANS TANGENTS AUX SURFACES COURBES.

**258.** La position d'un plan tangent à une surface courbe est assignée dès qu'on donne le point de contact, parce que la direction du plan est celle de l'élément de surface en ce point.

Pour le construire, la règle générale consiste à faire deux sections planes quelconques par le point donné, et à mener deux tangentes à ces courbes par le même point. Ces deux

Digitized by Google

tangentes sont situées dans le plan demandé et le déterminent.

Dans le cas d'une surface réglée, une seule section suffit, parce que celle de ses arêtes qui passe au point de contact est contenue dans le plan tangent et peut contribuer à sa détermination. Pour une surface gauche susceptible d'un double mode de génération (hyperboloïde à une nappe, paraboloïde hyperbolique), le plan tangent est le plan des deux arêtes qui se croisent au point de contact; ce plan a la propriété d'être en même temps sécant, puisqu'il coupe la surface suivant ces deux mêmes droites.

S'il s'agit d'une surface conique ou cylindrique, on prolonge l'arête qui passe au point de contact jusqu'à la rencontre de la base, et par le point de rencontre on mène une tangente à cette courbe. Le plan de ces deux droites satisfait à la question.

Quand le point de contact n'est pas donné, les conditions arbitraires du problème sont plus ou moins limitées, selon la nature de la surface; sous ce rapport, les surfaces coniques ou cylindriques se trouvent dans un cas particulier que nous examinerons d'abord.

259. Tout plan tangent à une surface conique ou cylindrique est parallèle à la génératrice du cylindre, ou passe par le sommet du cône. Il en résulte qu'un tel plan peut être assujetti seulement à passer par un point extérieur donné, ou à remplir une autre condition équivalente. Nous supposerons successivement qu'il doive passer par un point extérieur, ou bien être parallèle à une droite donnée.

Dans la première hypothèse, si la surface est conique, on observe que tout plan satisfaisant au problème contient la droite qui va de ce point au sommet du cône, puisqu'il doit passer à la fois par ces deux points. On construit en conséquence cette droite et son point de rencontre avec le

Digitized by Google

plan de la base, et de la rencontre on mène des tangentes à la courbe : leurs contacts déterminent les arêtes de contact. On obtient autant de solutions que l'on peut mener ainsi de tangentes.

L'opération est la même pour une surface cylindrique, si on la considère comme un cône dont le sommet est à l'infini. On mène par le point donné une parallèle à la génératrice, et de sa rencontre avec le plan de la base des tangentes à cette courbe.

Dans la seconde hypothèse, où le plan doit être parallèle à une droite donnée, on mène par un point quelconque de cette droite une seconde allant au sommet du cône ou parallèle à la génératrice du cylindre; elles déterminent l'une et l'autre un plan qui doit être parallèle aux plans demandés, et dont on construit la trace dans le plan de la base. Des tangentes parallèles à cette trace sont elles-mêmes les traces de ces plans.

Nous observerons que l'on peut se proposer de construire un plan tangent à un cylindre, parallèlement à un plan, lorsque ce plan est lui-même parallèle à la génératrice; il suffit de mener des tangentes à la base, parallèles à la trace du plan donné dans le plan de la courbe. Mais le problème deviendrait insoluble pour toute autre direction du plan donné.

260. A l'égard des surfaces de toute autre nature, on peut imposer au plan tangent les conditions équivalentes à celle de passer par une droite ou deux points extérieurs, parce qu'il n'est plus astreint à contenir un autre point déterminé de l'espace. Nous supposerons qu'il soit, en effet, assujetti à passer par une droite donnée, ou qu'il doive être parallèle à un plan donné.

Dans le premier de ces deux cas, on construit une surface cylindrique enveloppant la surface proposée, ou s'il y

Digitized by Google

a lieu, plusieurs surfaces cylindriques, les unes enveloppantes et les autres enveloppées, et dont les arêtes soient parallèles à la droite donnée. Les plans tangents qui seront menés par cette droite à la surface cylindrique satisferont à la question. D'ailleurs, pour construire cette dernière surface, on coupe la proposée par une suite de plans parallèles à la droite donnée, et l'on mène aux sections des tangentes qui lui soient également parallèles.

On pourrait aussi se servir d'une surface conique enveloppante, ayant son sommet en un point quelconque de la droite, par laquelle on mènerait encore des plans tangents. La construction de cette surface auxiliaire serait analogue à celle de la précédente; mais les plans sécants devraient passer par le point pris pour sommet.

L'opération se simplifie pour certaines espèces de surfaces. Par exemple, si l'on donne une sphère, on mène par son centre un plan perpendiculaire à la droite, qu'il rencontre en un certain point, et par ce point deux tangentes à la section résultante. Les plans déterminés par ces tangentes et la droite donnée sont les solutions du problème.

Elle est également très-simple, quand la surface est de révolution ayant son axe vertical, et qu'en outre la droite donnée est verticale ou horizontale; elle est expliquée pour cette hypothèse au n° 150, au sujet de la détermination des points latéraux ou culminants de la perspective.

Mais elle devient impossible et le problème n'a plus de solutions pour les surfaces réglées, lorsque la disposition de leurs arêtes est telle, que l'on ne peut concevoir aucune surface cylindrique enveloppante ou enveloppée et parallèle à la droite donnée.

Supposons maintenant que le plan tangent doive être parallèle à un plan donné. On construit une surface cylindrique enveloppante ou enveloppée, ayant ses arêtes pa-

Digitized by Google

rallèles à ce plan, du reste de direction arbitraire; et la question se réduit à mener des plants tangents à cette surface, parallèlement au même plan.

Pour une sphère, il suffit de construire les plans tangents par les extrémités du diamètre perpendiculaire au plan donné.

Pour les surfaces réglées, le problème est susceptible des mêmes restrictions que dans le cas précédent.

Voici quelques exemples.

*Plan tangent à un cône par un point extérieur.*

261. *Première méthode.* D'après cette méthode, qui est d'un usage vulgaire dans les Traités, on construit ou l'on suppose donnée la courbe qui représente la trace du cône dans un plan de projections, par exemple dans le plan horizontal; on joint le sommet au point donné par une droite dont on détermine la trace dans le même plan; par cette trace on mène des tangentes à la courbe; ce sont les traces horizontales des plans tangents demandés. Les traces verticales s'ensuivent, parce qu'elles doivent passer par la trace verticale de la droite précédemment construite; elles doivent d'ailleurs contenir en outre celles des arêtes de contact. Mais la trace du cône est rarement une donnée initiale du problème dans les questions pratiques, et nous trouverons en conséquence préférable la méthode suivante.

*Seconde méthode* (fig. 177). Soient IS la projection horizontale de l'axe du cône; A′ S′ B′ le triangle qui limite sa projection sur un plan vertical parallèle à cette droite; (O,O′) le point donné. Nous tirons la droite (OS, O′S′), qui rencontre en (G, G′) le plan de la base, et les plans de projections en R et T. Nous rabattons ce dernier plan autour de sa trace horizontale MN, et du rabattement $G_1$ du point (G,G′) nous tirons au rabattement du cercle les tangentes

Digitized by Google

$G_1\alpha_1$, $G_1\beta_1$. Les points de contact relevés $(\alpha, \alpha')$, $(\beta, \beta')$ font connaître les arêtes de contact $(\alpha S, \alpha' S')$, $(\beta S, \beta' S')$. Ces droites rencontrent le plan horizontal aux points U, V, lesquels déterminent les traces horizontales RUK, RVL des plans cherchés. Leurs traces verticales KT, LT s'ensuivent.

Les traces verticales des arêtes de contact pourraient également être construites, et servir à vérifier le résultat.

C'est de ce problème que dépend en particulier la détermination des arêtes de contour apparent d'un cône en perspective.

*Plan tangent à un cylindre parallèlement à une droite donnée* (fig. 178).

**262.** Ce problème, comme le précédent, est ordinairement résolu d'après une méthode qui suppose la construction préalable de la trace de la surface dans un plan de projections, et que l'on comprendra facilement par l'analogie. Mais voici comment il est généralement avantageux d'opérer.

Soient A'E'F'B' la projection du cylindre sur un plan vertical que nous prenons parallèle à sa génératrice; CG, DH les droites qui limitent sa projection horizontale; MN la trace du plan de la base. Par un point quelconque (O, O') pris sur l'arête (AE, A'E'), nous tirons une droite (OR, O'R') parallèle à la droite qu'on suppose donnée. Le plan déterminé par cette arête et la droite ainsi menée est parallèle aux plans demandés : il coupe le plan de la base suivant une droite parallèlement à laquelle nous devons mener des tangentes à cette courbe, et nous réaliserons cette conception à l'aide d'un rabattement autour de MN.

A cet effet, nous observons que, le plan de la base étant rencontré par la droite (OR, O'R') en (R, R'), et par l'arête (AE, A'E') en (A, A'), la droite (AR, A'R') est cette in-

Digitized by Google

tersection. Nous construisons son rabattement $R_1A_1$, ainsi que le rabattement de la base, et nous tirons, parallèlement à $R_1A_1$, deux tangentes à la courbe rabattue ; elles représentent les rabattements des tangentes que nous avons conçues dans l'espace, et leurs contacts $\alpha_1$, $\beta_1$ déterminent les points de contact relevés ($\alpha$, $\alpha'$), ($\beta$, $\beta'$). La droite $R_1A_1$ se trouvera d'ailleurs passer par le point J où AR rencontre MN.

Les tangentes à la base devant être contenues dans les plans tangents, leurs traces horizontales S, T, c'est-à-dire les points où leurs rabattements rencontrent MN, doivent appartenir aux traces horizontales de ces plans. Il en est ainsi des points U, V, où les arêtes de contact rencontrent le plan horizontal. Ces traces horizontales seront donc SUK, TVL; elles déterminent les traces verticales, qui doivent être parallèles aux projections verticales des génératrices.

On vérifiera le problème en construisant les traces verticales P, Q des tangentes à la base. On pourrait encore construire le plan des droites (AE, A'E'), (OR, O'R'), dont les traces devraient se trouver parallèles à celles des plans obtenus.

*Plan tangent à une sphère par un point donné* (fig. 179).

**263.** Un plan vertical de projections étant pris parallèle à la droite donnée, soient (AB, A'B') cette droite, rencontrant en R le plan horizontal; (I, I') le centre de la sphère, d'un rayon égal à IC. Par ce dernier point nous faisons passer le plan G'MN perpendiculaire à la droite, qu'il rencontre en (G, G'). Deux droites, partant de ce point de rencontre et tangentes à la section faite par le plan dans la sphère, seront contenues dans les plans tangents demandés, et en détermineront les contacts. La détermi-

Digitized by Google

nation complète de ces plans s'ensuivra, puisqu'ils doivent être perpendiculaires aux rayons menés par les contacts, et que leurs traces horizontales doivent en outre passer par le point R.

En conséquence, nous rabattons le plan sécant autour de MN, et $G_1$ étant le rabattement du point (G, G′), nous menons au rabattement de la section les tangentes $G_1\alpha_1$, $G_1\beta_1$, et obtenons par un relèvement les points de contact ($\alpha$, $\alpha'$), ($\beta$, $\beta'$) des plans demandés. Nous tirons I$\alpha$, I$\beta$, et perpendiculairement à ces directions, par le point R, les droites KRS, LRT, qui sont les traces horizontales de ces plans. Leurs traces verticales seront menées parallèlement à B′A′.

Le problème comporte plusieurs vérifications. Si par chacun des points de contact $\alpha$, $\beta$, on mène une parallèle à la trace horizontale du plan qui le contient, les points U, V, où ces parallèles rencontrent le plan vertical, sont situés sur les traces verticales. On peut faire dans la surface, par l'un ou l'autre point de contact, une section quelconque, et mener une tangente ayant le même contact; cette tangente devra se trouver contenue dans le plan tangent; mais, dans le cas particulier d'un section horizontale, la construction de la tangente rentrerait dans la vérification précédente. Enfin, les droites menées du point (G, G′) à chaque point de contact, et dont nous avons construit les rabattements, doivent satisfaire à la même condition.

## § VII.

### TANGENTES AUX COURBES D'INTERSECTION ET AUX LIGNES A DOUBLE COURBURE.

**264.** Toute tangente à une courbe a sa projection, sur un plan quelconque, tangente à celle de la courbe. Donc,

Digitized by Google

quand les projections d'une ligne d'intersection sont obtenues sur deux plans déterminés, pour lui mener une tangente en un de ses points pris à volonté, il suffit de mener, par les projections de ce point, des tangentes aux projections de cette ligne ; elles représentent les projections de la tangente demandée. Mais il arrive souvent que le tracé de ces tangentes ne peut être fait qu'à vue d'œil, par l'application d'une règle sur la circonférence des courbes, du moins sans recourir à des moyens qui sortent de la pratique, et il peut être alors préférable, pour l'exactitude, de se fonder sur cet autre principe général, aussi évident que le premier.

Toute tangente à une courbe située sur une surface quelconque est contenue dans le plan tangent mené par le même point de contact. Donc, si la courbe proposée résulte de la pénétration mutuelle de deux surfaces courbes, sa tangente en un point quelconque est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces menés par ce point ; et, si elle représente la section faite dans une surface courbe par un plan, la tangente est l'intersection de ce plan avec le plan tangent qui a le même contact. Dans ces deux cas, la construction de la tangente se ramène au problème des plans tangents.

Une courbe à double courbure, donnée d'une manière quelconque dans l'espace, peut toujours être considérée comme résultant de l'intersection de deux surfaces (250). Ce qui vient d'être dit pour les intersections s'applique donc généralement aux lignes de cette espèce.

On ne peut se proposer de mener une tangente à une ligne à double courbure par un point extérieur pris à volonté : le problème ne serait possible qu'autant que le point serait situé sur la surface développable formée par toutes les tangentes à la courbe. Mais on peut exiger que la tangente rencontre une droite ou une ligne quelconque donnée,



Digitized by Google

pourvu que la surface développable rencontre elle-même cette ligne en quelque point. Celle de ses arêtes qui passera par ce point satisfera au problème.

Nous nous bornerons à prendre un exemple très-simple de la tangente à une courbe d'intersection plane.

*Tangente à la courbe d'intersection d'un cône par un plan* (fig. 169).

265. Nous admettrons les données et la solution du problème du n° 245, où nous avons construit la courbe d'intersection d'un cône vertical par un plan. Soit donc $(\alpha, \alpha')$ le point donné sur cette courbe. Un plan tangent au cône par ce point a pour trace horizontale la droite 6U, menée tangentiellement à la base par l'extrémité de l'arête de contact. Le point U, rencontre de cette trace avec celle du plan donné, appartient à la tangente demandée, dont il représente la trace horizontale. Cette tangente $(\alpha U, \alpha' M)$ se trouve en conséquence déterminée.

Digitized by Google

# NOTE

## SUR LES APPROXIMATIONS DANS LES CALCULS NUMÉRIQUES APPLIQUÉS AUX OPÉRATIONS DE PERSPECTIVE.

266. Il est rare que tous les éléments d'un calcul, dans les opérations de géométrie pratique, aient cette exactitude abstraite qu'on leur suppose en théorie. Parmi les données d'un problème de ce genre, les unes peuvent être de convention, et les valeurs qu'on leur attribue sont parfaitement déterminées, tandis que d'autres, provenant de mesures métriques ou de constructions quelconques, approchent plus ou moins de l'exactitude. Deux questions, qu'on a souvent le tort de négliger, doivent en conséquence se présenter au praticien : *Connaissant le degré d'approximation des éléments d'un calcul, déterminer l'approximation du résultat;* et réciproquement : *Pour obtenir le résultat avec une approximation donnée, déterminer celle qui convient à chacun des éléments du calcul.* Nous allons nous proposer de les résoudre, du moins en ce qui concerne la multiplication et la division, nos calculs numériques de perspective ne comprenant que ces deux sortes d'opérations élémentaires; ces calculs sont d'ailleurs très-simples, et n'exigent pas le degré de généralité que nous donnerons d'abord à la théorie.

### *Multiplication.*

267. *Question directe.* Soient A et B les valeurs approchées de deux nombres à multiplier l'un par l'autre; $A+a$, $B+b$, leurs valeurs exactes. Le produit approché est AB, et le produit exact $AB+Ba+Ab+ab$. Ordinairement $a$ et $b$ ne sont que de petites fractions dont le produit est négligeable, et c'est ce que nous supposerons. La différence



Digitized by Google

entre le produit approché et le produit exact, c'est-à-dire l'erreur du premier, est donc

$$Ba + Ab.$$

Cette expression se réduirait à l'un de ces deux termes, si l'un des facteurs A et B était exact; elle donne lieu à quelques remarques.

Les valeurs numériques de B$a$ et A$b$ deviennent égales, lorsque les quantités $a$ et $b$ sont proportionnelles à A et B. Donc, *les erreurs des facteurs ont une égale influence sur l'erreur du produit, lorsqu'elles sont proportionnelles aux facteurs qu'elles affectent.* Le plus petit des facteurs est, dans ce cas, celui qui doit être donné avec le plus d'approximation : si l'erreur de ce facteur égalait celle du plus grand, son influence deviendrait prépondérante. C'est par la même raison que la plus petite dimension d'un rectangle est celle qu'on doit mesurer avec le plus de précision, pour l'évaluation de la surface.

Cette égalité d'influence étant supposée exister, si l'on élevait le degré d'approximation d'un seul des facteurs, on allongerait le calcul sans gagner beaucoup pour l'exactitude du résultat, dont l'erreur surpasserait toujours la moitié de ce qu'elle était d'abord. Il convient donc que les approximations des facteurs satisfassent, autant que possible, aux conditions de cette égalité. Si les fractions sont décimales, elles doivent être telles que les erreurs affectent un même ordre décimal dans le produit.

Souvent les erreurs sont susceptibles d'être par excès aussi bien que par défaut; alors elles se neutralisent mutuellement, et le produit doit être réputé exact, si, en même temps qu'elles sont proportionnelles aux facteurs, une d'elles est par excès et l'autre par défaut; car une des quantités B$\alpha$ et A6 doit être additionnée et l'autre soustraite, dans le produit exact. Nous exprimerons cette opposition dans la

Digitized by Google

nature des erreurs, en disant, comme en algèbre, qu'elles sont de *signes contraires*.

$a$ et $b$ sont des quantités inconnues, ou que l'on néglige pour simplifier le calcul. Or, quand on ne les connaît pas, on doit les remplacer par leurs limites, c'est-à-dire les supposer égales ou supérieures aux plus grandes valeurs qu'elles puissent avoir. Au reste, dans les calculs d'approximation, on ne considère généralement que des limites d'erreurs. On doit pareillement faire sur les signes des erreurs susceptibles d'être par excès et par défaut, l'hypothèse la plus défavorable.

Dans l'exemple que nous allons prendre et les suivants, les fractions sont décimales et les approximations ne sont évaluées que par les ordres décimaux.

EXEMPLE.

*Soit à multiplier* 347,23... *par* 4782,9...; *ces nombres sont supposés approchés à moins d'une unité de leur dernier ordre, c'est-à-dire à moins d'un centième et d'un dixième, les erreurs pouvant être par excès comme par défaut.*

Le produit des nombres donnés est 1660766,367. Pour en évaluer l'approximation, nous faisons $a=0,01$, $b=0,1$, en supposant les erreurs de mêmes signes comme le cas le plus défavorable, et nous trouvons :

$$Ba + Ab = 347,23 \times 0,1 + 4782,9 \times 0,01 = 82,552.$$

Nous concluons que l'erreur du produit est au-dessous de 82,552, mais qu'elle peut approcher de cette limite; d'ailleurs, elle peut être par excès comme par défaut. Ainsi, dans le produit calculé, la fraction décimale, les chiffres des unités et des dizaines, et même celui des centaines peuvent être fautifs. Toutefois, en les supprimant comme inutiles, on pourra juger convenable de conserver celui des dizaines, parce que sa valeur se combine avec les huit dizaines qui

Digitized by Google

entrent dans la limite d'erreur du produit. On obtient ainsi le nombre 1660760.

Si nous n'avions eu besoin que d'une approximation grossière, presque toujours suffisante pour la pratique, nous eussions mis à la place des facteurs les nombres ronds 300 et 5000 : la limite d'erreur du produit eût été 80, et nous l'aurions déterminée à la seule vue de ces nombres.

Dès qu'on a reconnu l'approximation que doit avoir le produit, on peut abréger le calcul de la multiplication, à l'aide du procédé indiqué dans les Traités d'arithmétique; mais on se prive ainsi de la ressource des vérifications, et entre autres de la preuve par 9, dont l'emploi est si commode.

268. *Question réciproque.* Supposons que l'erreur d'un produit ne doive pas surpasser une limite donnée $c$. Nous déterminerons les limites $a$ et $b$ des erreurs que comportent ses facteurs A et B, en les prenant telles, que la quantité $Ba + Ab$ n'excède pas $c$, et faisant en sorte, pour éviter les calculs inutiles, qu'elles soient à peu près proportionnelles aux facteurs. Il suffit, quand on opère sur des nombres décimaux, de trouver de quel ordre décimal doivent être les derniers chiffres dans A et B. On y parvient très-aisément, au moyen de quelques essais ou même à la simple inspection des nombres.

EXEMPLE.

*Soit à multiplier la racine carrée de 148596 par le rapport de la circonférence au diamètre, le produit étant demandé à moins d'un dix-millième, et les erreurs des facteurs devant être par défaut.*

La racine carrée du nombre 148596 est comprise entre 300 et 400, et l'autre facteur est seulement un peu plus fort que 3. En conséquence, nous substituons aux proposés les nombres ronds 400 et 3, ce qui n'élève pas et ne change

Digitized by Google

que très-peu les approximations demandées. Le second facteur devant être le plus approché et contenir deux chiffres décimaux de plus que le premier, nous essayons $\alpha = 0,00001$ et $\beta = 0,0000001$, d'où

$$Ba + Ab = 0,00003 + 0,00004 = 0,00007.$$

Cette valeur est moindre que 0,0001; mais, en élevant d'un rang décimal celles de $\alpha$ et $\beta$, nous trouverions 0,0007, c'est-à-dire plus que la même limite.

Donc, nous avons fait d'abord la bonne hypothèse : ainsi la racine carrée doit être développée jusqu'au cinquième chiffre décimal inclusivement, et le rapport de la circonférence au diamètre jusqu'au septième. Les facteurs sont en conséquence les nombres 385,48151 et 3,1415926, dont le produit 1211,02585925 2826 peut être fautif, seulement à partir du quatrième ordre décimal.

269. *Facteurs en nombre quelconque.* Au lieu de deux facteurs seulement, on peut en avoir un nombre quelconque : nous supposerons d'abord qu'on en ait trois. Soient A, B, C les valeurs approchées, et $A + a$, $B + b$, $C + c$ les valeurs exactes de ces facteurs. Leur produit approché est ABC : si, dans le produit exact, on supprime, comme des quantités très-petites, les produits des fractions $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, il se réduit à $ABC + BCa + ACb + ABc$. La différence ou l'erreur du produit approché est donc :

$$BCa + ACb + ABc,$$

expression symétrique qui se traduit ainsi : *l'erreur du produit approché est la somme des produits deux à deux des facteurs donnés, multipliés respectivement par l'erreur de l'autre facteur.*

S'il y avait quatre facteurs, on trouverait une expression composée des produits trois à trois, multipliés respectivement par l'erreur de l'autre facteur, et ainsi de suite.

Digitized by Google

Il est avantageux, pour n'exécuter que le calcul nécessaire, que les erreurs des facteurs aient toutes des influences égales sur l'erreur du produit. Or, si l'on suppose dans l'expression relative à trois facteurs, $BCa = ACb = ABc$, on en conclut :

$$Ba = Ab \quad \text{et} \quad Cb = Bc,$$

d'où il suit que $a$, $b$, $c$ doivent être proportionnelles à A, B, C. Il est visible que la conclusion serait analogue pour un plus grand nombre de facteurs. Donc, *les erreurs des facteurs ont des influences égales sur le produit, lorsqu'elles sont proportionnelles aux facteurs qu'elles affectent.* Ainsi se trouve généralisée la remarque que nous avions faite pour le cas de deux facteurs.

Ce qui vient d'être dit pour évaluer l'approximation du produit d'un nombre quelconque de facteurs fera comprendre suffisamment comment doit se résoudre la question réciproque. La manière d'opérer est entièrement semblable à celle du premier cas ; mais on ne doit pas oublier que les erreurs des facteurs ont été supposées n'être que de très-petites quantités.

*Division.*

**270.** *Question directe.* Soient, comme précédemment, A et B les valeurs approchées de deux nombres ; $A + a$ et $B + b$ les valeurs exactes. Leur quotient approché est $\frac{A}{B}$, et leur quotient exact $\frac{A + a}{B + b}$. Or, nous avons identiquement :

$$\frac{A + a}{B + b} = \frac{A}{B} + \frac{Ba - Ab}{B(B + b)},$$

ce qu'on peut vérifier en réduisant au même dénominateur les fractions du second membre de l'égalité. La différence

Digitized by Google

entre le quotient approché et le quotient exact est donc $\frac{Ba - Ab}{B(B+b)}$, ou, en négligeant $b$ dans le dénominateur,

$$\frac{Ba - Ab}{B^2}.$$

Si le diviseur donné B est exact, $b = 0$, et cette expression se réduit à $\frac{a}{B}$. Si A est exact, elle se réduit, abstraction faite du signe, à $\frac{Ab}{B^2}$.

L'erreur du quotient approché est par défaut, lorsque la valeur numérique de la même expression doit réellement s'ajouter à celle de $\frac{A}{B}$, pour composer le quotient exact; mais il peut arriver que l'addition se change en soustraction, et l'erreur du quotient est alors par excès. Cette conséquence deviendrait plus manifeste s'il nous était permis d'employer la théorie des signes algébriques.

Quel que soit le signe de l'erreur du quotient, si les erreurs $a$ et $b$ sont toutes deux par défaut ou toutes deux par excès, les valeurs numériques de B$a$ et A$b$ se retranchent l'une de l'autre dans l'expression ci-dessus, et leur différence est nulle lorsqu'elles sont égales, c'est-à-dire lorsque $a$ et $b$ sont proportionnelles à A et B : c'est la circonstance la plus favorable. Si l'une des erreurs est par excès et l'autre par défaut, les mêmes valeurs numériques s'ajoutent entre elles, mais elles sont toujours égales dans le cas de la proportion. Donc, *quand les erreurs* a *et* b *sont proportionnelles aux deux nombres* A *et* B, *si elles sont de même signe, le quotient* $\frac{A}{B}$ *est exact; et si elles sont de signes contraires, elles ont des influences égales sur l'erreur de ce quotient.*

L'égalité des influences procure ici les mêmes avantages

Digitized by Google

que dans le cas analogue de la multiplication, et l'on doit chercher à y satisfaire.

Cela posé, pour évaluer l'approximation d'un quotient, nous devrons généralement remplacer $a$ et $b$ par leurs limites dans la formule qui vient d'être discutée, et faire les hypothèses les plus défavorables sur les signes des erreurs, quand ils seront inconnus. Mais nous pourrons substituer des nombres ronds à ceux du problème, pourvu que ces changements n'élèvent pas le degré d'approximation du quotient et soient plutôt de nature à l'abaisser.

PREMIER EXEMPLE.

*Soit à diviser* 285,375... *par* 52436,7..., *chaque nombre étant connu à moins d'une unité du dernier ordre, et les erreurs ne pouvant être que par défaut.*

Nous supposons le cas le plus défavorable, qui est ici $b = 0$, et $a = 0{,}001$, ce qui donne, en remplaçant le diviseur par le nombre rond 52000 :

$$\frac{a}{B} = \frac{0{,}001}{52\,000} = \frac{1}{52\,000\,000}.$$

Cette valeur est moindre que 0,0000001 : ainsi, l'on peut développer le quotient jusqu'au septième ordre décimal inclusivement, et l'on trouvera 0,0054422. Dans l'hypothèse que nous avons faite pour obtenir la limite d'erreur du quotient, cette erreur serait par défaut.

DEUXIÈME EXEMPLE.

*Soit à diviser* 0,85356... *par* 208,35, *chaque nombre étant exact à moins d'une unité de son dernier ordre, et les erreurs étant par défaut.*

Nous reconnaissons que l'hypothèse la plus défavorable consiste à supposer $a = 0$, $b = 0{,}01$. Nous substituons aux

Digitized by Google

proposés les nombres ronds 0,9 et 200, et obtenons :

$$\frac{Ab}{B^2} = \frac{0,9 \times 0,01}{(200)^2} = \frac{0,009}{40000} = \frac{9}{4000000},$$

valeur moindre que 0,000001. Le quotient peut donc être calculé jusqu'au sixième ordre. Si l'erreur maximum avait lieu, comme nous l'avons supposé, elle serait par excès.

TROISIÈME EXEMPLE.

*Soit à diviser* 789,7234... *par* 42,58273, *chaque nombre étant exact à moins d'une demi-unité de son dernier ordre, et les erreurs pouvant être par excès comme par défaut.*

Nous supposons, comme les circonstances les plus défavorables, que les erreurs des deux nombres soient de signes contraires, et numériquement égales à leurs limites 0,00005 et 0,000005. La soustraction se changera donc en addition, sur les valeurs numériques de $Ba$ et $Ab$. Nous substituons d'ailleurs aux proposés les nombres 800 et 40, et nous obtenons :

$$\frac{Ba - Ab}{B^2} = \frac{40 \times 0,00005 + 800 \times 0,000005}{(40)^2} = \frac{6}{1600000}.$$

Cette quantité étant moindre que 0,00001, le quotient est calculable avec cinq chiffres décimaux.

Ce dernier exemple donne lieu à une remarque. On a souvent à opérer sur des nombres approchés à moins d'une demi-unité de leur dernier ordre, les erreurs pouvant être en plus comme en moins. Tels sont, par exemple, les calculs sur les logarithmes tabulaires, parce que dans la construction des Tables, lorsque le premier des chiffres négligés pour chaque logarithme était égal ou supérieur à 5, le dernier des chiffres conservés était augmenté d'une unité.

Digitized by Google

Or, nous sommes à même d'apprécier les avantages de ce mode d'approximation, quand il s'agit d'une division.

Si d'abord les erreurs $a$ et $b$ doivent être de même signe, l'hypothèse la plus défavorable est celle où l'une d'elles est nulle et l'autre égale à sa limite, ce qui donne soit $\frac{a}{B}$, soit $\frac{Ab}{B^2}$, pour la limite d'erreur du quotient. Mais, si les erreurs sont susceptibles des deux signes et que leurs limites soient de moitié moindres que les précédentes, on les suppose de signes contraires; les valeurs numériques s'ajoutent dans le numérateur, et, en indiquant explicitement cette addition, on a $\frac{\frac{1}{2}Ba + \frac{1}{2}Ab}{B^2}$. Or, cette quantité est moindre que chacune de celles qui se rapportent au premier cas. Il y aurait seulement égalité si la valeur de $Ba$ était elle-même égale à celle de $Ab$. Donc, la limite d'erreur du quotient est généralement moindre dans le second cas que dans le premier. Observons en outre que les erreurs, qui ont été supposées de signes contraires, peuvent se trouver de mêmes signes, ou que l'une d'elles peut être nulle, et que l'erreur du quotient, dans ces hypothèses, se réduirait à la moitié de celle que donne le premier cas.

**271.** *Question réciproque.* Si l'on demande que l'erreur d'un quotient $\frac{A}{B}$ n'excède pas une limite donnée $c$, nous trouverons par quelques essais les limites d'erreurs $a$ et $b$ des deux termes de la division, en les prenant sensiblement proportionnelles à ces nombres, et telles que $\frac{Ba - Ab}{B^2}$ soit tout au plus égale à $c$. Il suffira d'en prendre un exemple.

EXEMPLE.

*Soit à diviser la base du système de logarithmes népériens par le rapport de la circonférence au diamètre, le*

Digitized by Google

*quotient devant être exact à moins d'un cent-millième, et ces nombres en erreur par défaut.*

Les deux termes de la division sont des nombres incommensurables, que nous réduisons à 2,7 et 3,1 pour le calcul préalable des degrés d'approximation demandés. Les limites $a$ et $b$ de leurs erreurs seront du même ordre décimal, et nous essayons $a = b = 0,00001$. Nous trouvons :

$$\frac{Ba - Ab}{B^2} = \frac{3,1 \times 0,00001 - 2,7 \times 0,00001}{(3,1)^2} = \frac{4}{961000}.$$

Cette valeur est comprise entre 0,00001 et 0,000001. Nous devons donc opérer sur les nombres développés jusqu'aux cent-millièmes, savoir 2,71828 et 3,14159.

*Combinaison de multiplications et de divisions.*

**272.** De quelque manière que ces opérations soient combinées entre elles, nous déterminerons le degré d'approximation du résultat définitif, en évaluant successivement celui de chacun des résultats des opérations partielles à effectuer. Le calcul se ramène donc à ce qui précède, et il en est ainsi pour la question réciproque.

PREMIER EXEMPLE.

*Déterminer le degré d'approximation, dans la valeur de l'expression* $\frac{293,4529\ldots \times 56,75384\ldots}{96 \times 2,578457\ldots}$, *où le facteur* 96 *est donné exactement, et les autres à moins d'une unité de leur dernier ordre décimal.*

Nous évaluons d'abord l'approximation du produit qui forme le numérateur, et trouvons 0,01 pour sa limite d'erreur ; en calculant ce produit jusqu'à cette limite, nous obtenons 16654,57. De même, nous trouvons 0,0001 pour

Digitized by Google

la limite d'erreur du dénominateur, et 247,5318 pour son développement jusqu'à cette seconde limite. Nous n'avons donc plus qu'une fraction dont les deux termes sont les nombres 16654,57... et 247,5318..., approchés à moins d'une unité de leur dernier ordre : l'application de la formule relative à ce cas nous donne 0,0001 pour la limite d'erreur du quotient, qu'on peut en conséquence calculer avec quatre chiffres décimaux. On obtient 67,2825.

DEUXIÈME EXEMPLE.

*Étant donnée l'expression* $\frac{72\sqrt{518}}{\sqrt{536427} \times 60\sqrt{6677}}$, *dont on veut obtenir la valeur à moins d'un dix-millionième, déterminer l'approximation qu'il convient de donner à la valeur de chaque racine carrée.*

Nous calculons une valeur grossièrement approchée de la fraction, ou de ses deux termes, et trouvons qu'elle peut être représentée par $\frac{1638}{5635}$. Supposons les deux termes de cette dernière fraction exacts à moins de 0,0002 : l'application de la règle nous apprend que la limite d'erreur du quotient est comprise entre un dix-millionième et un cent-millionième, et c'est ce que nous désirions. Telle est en conséquence l'approximation que nous donnerons à ces quantités. Or, il est facile de reconnaître, en examinant le développement de la racine carrée de 518, que l'erreur du numérateur n'atteindra pas 0,0002, si nous prenons dans ce développement cinq chiffres décimaux; et qu'il en est ainsi à l'égard du dénominateur, si nous prenons $\sqrt{536427}$ avec quatre, et $\sqrt{6677}$ avec cinq décimales. Nous obtenons de la sorte 0,3535354 pour le résultat définitif ou la valeur de l'expression proposée.

Digitized by Google

*Application aux opérations de perspective.*

273. Dans les opérations pratiques de perspective, le degré d'exactitude qu'il semble convenable de donner à la position de chaque point sur le tableau est en raison inverse des dimensions de la toile : ces dimensions peuvent être supposées proportionnelles à la distance centrale, d'où il suit que les quantités négligeables dans les valeurs des coordonnées perspectives sont proportionnelles à cette distance. Nous examinerons, en effet, l'approximation qu'exige alors la détermination des coordonnées aériennes.

Mais on est également libre de vouloir que ce degré d'exactitude soit le même sur toutes les toiles, par exemple d'un millimètre, et c'est la convention que nous avons faite au n° 97, dans l'unique but de donner aux résultats de nos problèmes une expression plus régulière. Commençons par discuter cette hypothèse.

274. Les coordonnées perspectives $x$ et $y$ d'un point quelconque ont pour valeurs (96), $x = \frac{\delta X}{Z}$, $y = \frac{\delta Y}{Z}$; mais il nous suffit de considérer la première. La valeur $\delta$ de la distance centrale est fixée arbitrairement, et dès lors exacte. Soient $a$ et $b$ les limites d'erreurs de X et Z; nous aurons pour la limite d'erreur du quotient $c = \delta \frac{Za - Xb}{Z^2}$. Ordinairement, X est notablement moindre que Z, et $b$ est de même ordre que $a$. Supprimant en conséquence $Xb$, comme influant peu sur la valeur du numérateur, nous obtenons :

$$c = \frac{\delta a}{Z}.$$

Telle est la formule dont nous ferons usage : elle déterminera l'une des quantités $c$ et $a$, lorsque l'autre sera donnée.

Digitized by Google

Mais observons que cette valeur de $c$ représente uniquement la limite de l'erreur provenant de l'inexactitude des coordonnées aériennes, pour la détermination de l'ordonnée $x$; elle doit donc se combiner avec la nouvelle erreur que l'on commet en négligeant le reste de la division, lorsque l'on calcule cette ordonnée avec un nombre convenu de chiffres décimaux; on peut toujours faire en sorte que cette seconde erreur soit moindre qu'une demi-unité du dernier ordre décimal, tant par excès que par défaut, et alors la valeur de $c$ ne doit pas excéder la même limite, si l'on veut obtenir $x$ à moins d'une unité de cet ordre.

PREMIER EXEMPLE.

*Soient* $X = 16$ *mètres*, $Z = 420$ *mètres*, $\delta = 4$ *mètres*; *et* $a = 0^m, 05$.

Nous aurons $c = \frac{4 \times 0,05}{420} = \frac{2}{4200}$. Ainsi $c$ est moindre qu'un demi-millième. La valeur de $x$, calculée avec trois décimales, sera donc exacte à moins d'un millimètre, tant par excès que par défaut, savoir, $x = 0^m, 114$. Et, si on la calculait avec un nombre indéfini de décimales, l'erreur dont elle resterait affectée aurait pour limite la valeur ci-dessus de $c$.

DEUXIÈME EXEMPLE.

*Soient* $X = 21$ *mètres*, $Z = 180$, $\delta = 3$, $c = 0,0005$.
Nous tirons de notre formule :

$$a = \frac{cZ}{\delta} = \frac{0,0005 \times 180}{3} = 0,03;$$

et nous voyons que l'ordonnée $x$ sera exacte, comme on le suppose, à moins d'un demi-millimètre, si les coordonnées aériennes le sont à moins de 3 centimètres. Par suite, cette

Digitized by Google

ordonnée, calculée comme précédemment avec trois décimales, aura pour limite d'erreur un millimètre, savoir : $x = 0^m,367$.

En résumé, le calcul des approximations, appliqué aux coordonnées aériennes ou perspectives, se réduit à l'emploi d'une formule très-simple, ou même, pour ainsi dire, à l'examen le plus superficiel des données de chaque question. Dans les résultats géométraux de nos problèmes, les coordonnées aériennes sont exactes à moins d'une demi-unité de leur dernier ordre décimal; et ce degré d'approximation est toujours réglé de telle sorte, que les erreurs résultantes pour les coordonnées perspectives n'excèdent pas un demi-millimètre, ou que nous obtenions celles-ci à moins d'un millimètre en tenant compte des deux causes d'erreurs qui ont été signalées.

Il résulte de la même théorie que la détermination de l'ordonnée Z n'exige pas, en général, le même degré de précision que celles de X ou de Y. En faisant usage des résultats géométraux de nos problèmes pour le calcul des coordonnées perspectives, on pourra presque toujours, lorsqu'ils sont évalués à moins d'un millimètre, supprimer le dernier chiffre de Z. On appliquera d'ailleurs le procédé de simplification indiqué dans les Traités d'arithmétique, consistant à supprimer successivement les autres chiffres du diviseur, au lieu d'ajouter des zéros sur la droite des restes correspondants, avec la seule précaution d'augmenter d'une unité le chiffre qui précède celui que l'on supprime, quand celui-ci est égal ou supérieur à 5.

275. Supposons maintenant que les erreurs permises dans la détermination des coordonnées perspectives soient proportionnelles aux dimensions du tableau, ou à la distance centrale. Dans cette nouvelle hypothèse, on donne l'approximation qui convient aux coordonnées perspec-



Digitized by Google

tives, pour le cas où la distance centrale est l'unité, et il s'agit de trouver, pour une valeur quelconque de cette distance, l'approximation que doivent avoir les coordonnées aériennes.

Désignons par $c'$ la limite d'erreur de l'ordonnée $x$, pour $\delta = 1$. Nous aurons, pour une valeur quelconque de $\delta$, $c = \delta c'$. Mais la formule générale donne

$$a = \frac{cZ}{\delta}.$$

Donc, il vient

$$a = \frac{\delta c' Z}{\delta} = c' Z.$$

Ainsi, l'approximation des coordonnées aériennes devient indépendante de la distance centrale, mais elle varie proportionnellement à Z, comme il était facile de le prévoir.

EXEMPLE.

*Soient* $Z = 125^m$, $\delta = 7^m$, $c' = 0^m,0004$.

Nous avons $a = 125 \times 0,0004 = 0,05$. Les coordonnées aériennes doivent donc être déterminées à moins de un demi-décimètre. En effet, on trouve réciproquement, avec cette valeur de $a$, que les coordonnées perspectives sont exactes à moins de $0^m,0004$ en supposant $\delta = 1$ mètre, ou bien à moins de $0^m,0028$, en supposant $\delta = 7$ mètres.

Digitized by Google

# NOTIONS

SUR LES

# ORDRES D'ARCHITECTURE.

276. L'architecture est, de tous les arts, celui dont les œuvres doivent le plus essentiellement satisfaire aux lois de l'harmonie. Les diverses parties de tout édifice construit suivant les règles de cet art sont tellement liées entre elles par des rapports de convenance réciproque, qu'on ne peut en déranger une seule sans porter atteinte à la perfection de l'ouvrage. Quelques-unes de ces parties peuvent donc suffire pour caractériser le style de l'édifice, et l'on a choisi dans ce but celles qui font son plus noble et son principal ornement. On a pris en résumé un ORDRE, composé d'un *piédestal*, d'une *colonne* et d'un *entablement*.

Les éléments constitutifs de chaque ordre sont susceptibles de varier dans leurs proportions ; mais on les rapporte généralement à un petit nombre de types que nous offrent les monuments de l'antiquité grecque ou romaine, et qui, après avoir traversé les siècles, sont encore aujourd'hui les modèles du genre. Ce sont les ordres *toscan*, *dorique romain*, *ionique*, *corinthien* et *composite*. Toutefois, l'ordre composite, modification du corinthien, mais paraissant moins pur dans ses formes, est rejeté par quelques auteurs modernes. D'autres admettent le *dorique grec*, qui est la souche du dorique romain. L'ionique et le corinthien appartiennent d'ailleurs à l'architecture grecque ; le toscan et le composite à l'architecture romaine.

Les *moulures* employées dans les ordres sont des surfaces toriques, cylindriques ou polyédriques, qui prennent différents noms suivant leurs assemblages et leurs emplace-



Digitized by Google

ments : on les comprendra à la seule inspection des planches.

Les ordres, dans les planches, sont représentés par leurs projections horizontales et verticales, qui suffisent généralement pour déterminer leurs figures : nous observerons cependant que les projections horizontales sont des carrés pour chaque piédestal, et des cercles pour les moulures des colonnes. Pour celles de l'entablement, les mêmes projections sont rectangulaires; mais ici elles peuvent s'étendre indéfiniment, parce qu'elles s'appliquent à toute une suite de colonnes. La plinthe d'une colonne est toujours carrée; il en est ainsi du tailloir et de son filet, excepté les ordres corinthien et composite, où cette partie est polygonale avec des angles rentrants.

Dans l'ordre toscan, et quelquefois dans les ordres plus élevés, le fût de la colonne est nu : autrement, il est creusé en cannelures, dont le nombre, l'espacement et la profondeur seront indiqués.

Un ordre n'est pas toujours complet. Souvent on supprime le piédestal ou certaines parties de l'entablement. On ajoute, au contraire, à la frise et à la corniche qui la surmonte divers ornements, tels que triglyphes, candélabres, rinceaux, etc. Ces ornements doivent être assortis entre eux et au caractère de l'ordre.

Dans chaque ordre, les proportions, ou les grandeurs relatives de toutes les parties, se déterminent au moyen d'une unité nommée *module*, que nous supposerons être le rayon de la colonne, pris vers sa base, au-dessus du congé. En général, le fût est cylindrique jusqu'au tiers de sa hauteur, puis il devient conique, de manière que la diminution du rayon sous l'astragale varie d'un cinquième à un huitième : s'il y a un prolongement au-dessus de l'astragale, il est cylindrique, et son rayon est le même qu'immédiatement au-dessous. Relativement à cette unité, les éléments

Digitized by Google

linéaires de l'ordre se trouvent représentés par certains nombres, entiers ou fractionnaires. On en verra ci-après le détail pour chaque ordre (*).

Ces grandeurs relatives étant connues, pour en conclure, dans toute question proposée, les grandeurs métriques, il suffit de les multiplier par la valeur métrique attribuée au module. Ainsi, par exemple, si dans une colonne de l'ordre toscan le module est de 6 décimètres, la hauteur métrique du congé égalera $0^m,6 \times 0,125$ ou $0^m,075$.

## ORDRE TOSCAN (*Pl.* XXXIII.)

277. L'ordre toscan est le plus simple de tous : il convient par son épaisseur aux édifices où les colonnes doivent supporter de fortes masses. On le voit cependant, au palais du Luxembourg, disposé en étages avec une véritable élégance, alterné d'assises simples et d'assises à bossages.

Le fût de la colonne ne porte pas de cannelures : la diminution de son rayon sous l'astragale est d'un cinquième. L'entablement n'est susceptible d'aucune décoration.

### *Proportions en hauteur.*

Les proportions en hauteur sont les suivantes. Le piédestal a 4 modules, la colonne 14 et l'entablement $3\frac{1}{3}$, ainsi subdivisés :

(*) On est dans l'usage de décomposer l'unité principale en unités secondaires, et l'on distingue des *grandes*, des *moyennes* parties, etc., ce qui complique d'autant plus, qu'on ne fait pas cette subdivision de manière à éviter les fractions. J'ai rapporté toutes les dimensions au module, comme seule unité, et sous la forme décimale qui se prête mieux aux applications métriques.

Les proportions des ordres n'étant pas constantes, j'ai pris une moyenne entre celles qui s'appuient sur les meilleures autorités, parmi lesquelles je dois citer M. Charles Normand.

Digitized by Google

*Piédestal* = 4.

| | | |
|---|---|---|
| Base = 0,5. . . . . | Socle. . . . . | 0,417 |
| | Listel. . . . . | 0,083 |
| Dé = 3. . . . . | Congé. . . . . | 0,167 |
| | Face du dé. . . . . | 2,833 |
| Corniche = 0,5. . . . | Talon. . . . . | 0,333 |
| | Réglet. . . . . | 0,167 |

*Colonne* = 14.

| | | |
|---|---|---|
| Base = 1. . . . . | Plinthe. . . . . | 0,500 |
| | Ceinture. . . . . | 0,100 |
| | Tore. . . . . | 0,400 |
| Fût = 12. . . . . | Congé. . . . . | 0,125 |
| | Vif de la colonne. . . . . | 11,710 |
| | Filet de l'astragale. . . . . | 0,055 |
| | Astragale. . . . . | 0,110 |
| Chapiteau = 1. . . . | Gorgerin. . . . . | 0,333 |
| | Filet. . . . . | 0,055 |
| | Quart de rond. . . . . | 0,279 |
| | Tailloir. . . . . | 0,333 |

*Entablement* = 3,333.

| | | |
|---|---|---|
| Architrave = 1. . . . | Face de l'architrave. . . . . | 0,668 |
| | Congé du listel. . . . . | 0,166 |
| | Listel. . . . . | 0,166 |
| Frise = 1. | | |
| Corniche = 1,333. . | Talon. . . . . | 0,333 |
| | Filet. . . . . | 0,055 |
| | Larmier. . . . . | 0,447 |
| | Filet. . . . . | 0,055 |
| | Baguette. . . . . | 0,110 |
| | Quart de rond. . . . . | 0,333 |

Digitized by Google

*Proportions en largeur.*

Les proportions en largeur se déterminent par les saillies consécutives des moulures dans le plan de leurs projections verticales. La saillie d'un congé sur la surface de son raccord étant égale à sa hauteur, sa largeur résultera de celle de cette surface, puisque sa hauteur est déjà connue.

Dans toutes les parties de l'ordre, chaque talon ou quart de rond est en retraite de 0,042 au-dessous de la moulure qu'il supporte.

La largeur du dé, celle de la plinthe et le plus grand diamètre du tore, sont égaux à 2,7. Ces trois grandeurs sont égales entre elles dans tous les ordres. On remarquera en conséquence que la ceinture ne correspond pas exactement, en direction verticale, au centre du cercle générateur du tore; mais le faible prolongement de la surface du tore jusqu'à la base de la ceinture est une surface plane dont il est permis de faire abstraction.

Dans le piédestal, la largeur du socle, aussi bien que celle du réglet et de la corniche, est égale à 3,333.

Dans le chapiteau, la saillie sur le vif du gorgerin est 0,083 pour la ceinture et le filet de l'astragale; 0,167 pour l'astragale; 0,333 pour le tailloir.

Dans l'entablement, l'architrave et la frise s'alignent sur le vif du gorgerin; la saillie sur cet alignement égale 0,167 pour le listel; 0,333 pour le filet sous le larmier; 0,875 pour le larmier; 1,042 pour la baguette, et 1,333 pour le quart de rond : la plus grande saillie de la corniche est en conséquence égale à sa hauteur.

ORDRE DORIQUE. (*Pl.* XXXIV.)

**278.** L'ordre dorique romain, plus svelte que l'ordre toscan, décore les édifices d'un style un peu plus élevé. Sa simplicité n'exclut pas la noblesse, comme le prouve en

Digitized by Google

particulier le péristyle du théâtre de l'Odéon. Il est très-usité dans la superposition de plusieurs ordres, dont il forme généralement l'étage inférieur. Il dérive de l'ordre dorique grec, lequel, selon les archéologues, devrait être attribué à Dorus, petit-fils de Deucalion : du moins, Vitruve a cru trouver à Argos les premiers vestiges de cet ordre dans un temple de Junon, élevé par ce prince du Péloponèse.

Le fût de la colonne porte vingt cannelures, sans espace entre elles, se projetant horizontalement suivant des arcs de 60 ou de 90 degrés. La diminution du rayon au-dessous de l'astragale est d'un sixième. La frise est ornée de triglyphes.

### *Proportions en hauteur.*

Le piédestal, ainsi que l'entablement, a 4 $\frac{3}{4}$ modules ; la colonne 16.

*Piédestal* = 4,666.

| | | |
|---|---|---|
| Base = 0,736. . . . | Socle. . . . . | 0,415 |
| | Talon. . . . . | 0,183 |
| | Baguette. . . . . | 0,092 |
| | Filet. . . . . | 0,046 |

Dé avec son congé = 3,430.

| | | |
|---|---|---|
| Corniche = 0,500. . . | Talon. . . . . | 0,138 |
| | Larmier . . . . . | 0,183 |
| | Filet. . . . . | 0,046 |
| | Quart de ronde. . . . . | 0,092 |
| | Réglet. . . . . | 0,046 |

*Colonne* = 16.

| | | |
|---|---|---|
| Base = 1. . . . . | Plinthe. . . . . | 0,450 |
| | Tore. . . . . | 0,366 |
| | Baguette. . . . . | 0,092 |
| | Ceinture. . . . . | 0,092 |

Digitized by Google

| | | |
|---|---|---|
| Fût = 14..... | Le vif avec son congé. . . . . | 13,862 |
| | Ceinture de l'astragale. . . . . | 0,046 |
| | Astragale. . . . . | 0,092 |
| Chapiteau = 1..... | Gorgerin. . . . . | 0,325 |
| | Trois filets égaux. . . . . | 0,137 |
| | Quart de rond. . . . . | 0,200 |
| | Tailloir. . . . . | 0,200 |
| | Talon. . . . . | 0,092 |
| | Filet. . . . . | 0,046 |

*Entablement* = 3,667.

| | | |
|---|---|---|
| Architrave = 1..... | Face de l'architrave. . . . . | 0,883 |
| | Réglet. . . . . | 0,117 |
| Frise = 1,5. | | |
| Corniche = 1,167... | Chapiteau des triglyphes. . . . | 0,117 |
| | Baguette. . . . . | 0,033 |
| | Mutules. . . . . | 0,216 |
| | Talon. . . . . | 0,029 |
| | Larmier. . . . . | 0,280 |
| | Cimaise. . . . . | 0,092 |
| | Filet. . . . . | 0,033 |
| | Cavet. . . . . | 0,275 |
| | Réglet. . . . . | 0,092 |

## *Proportions en largeur.*

Le dé, le tore et la plinthe ont pour largeur 2,842.

Dans le piédestal, la saillie sur le dé égale : 0,367 pour le socle; 0,160 pour la baguette; 0,092 pour le filet; 0,321 pour le talon de la base, en dessous, et 0,183 en dessus; 0,115 pour le talon de la corniche en dessus; 0,367 pour le larmier, qui s'aligne sur le socle; 0,400 pour le filet du larmier; 0,504 pour le réglet. Le réglet déborde sur le quart de rond de 0,023, comme le talon au-dessous du larmier sur le dé.

Digitized by Google

Dans la colonne, la baguette de la base déborde sur le fût de 0,252, et la ceinture de 0,138, ce qui détermine la hauteur du congé. La saillie sur le gorgerin est : 0,137 pour l'astragale; 0,090 pour la ceinture de l'astragale; 0,337 pour l'ove; 0,370 pour le tailloir; 0,403 pour le bas du talon et 0,460 pour le haut; 0,493 pour le filet supérieur : on voit que le filet supérieur déborde de 0,033 sur le talon, comme le talon sur le tailloir et le tailloir sur l'ove. La saillie de chacun des trois filets consécutifs est égale à sa hauteur; d'où il suit que le troisième s'aligne avec l'astragale et le second avec la ceinture.

Dans l'entablement, l'architrave et la frise s'alignent avec le gorgerin. Le réglet qui porte les triglyphes a pour saillie sa hauteur. Les triglyphes saillissent de 0,060 sur la face de la frise, et les gouttes qui leur correspondent au-dessous de 0,090. Sur le même alignement le profil des mutules s'avance de 1,161, le larmier de 1,405, et le réglet de 1,772. Les petites saillies intermédiaires sur les faces successivement débordées sont chacune de 0,030.

## ORDRE IONIQUE. (*Pl.* XXXV.)

**279.** Les proportions de l'ordre ionique sont extrêmement heureuses. La grâce et la légèreté sont ses attributs et le rendent éminemment propre aux décorations d'intérieurs. Mais, sur une plus grande échelle, il s'applique avec un égal succès aux frontispices des monuments du plus noble caractère. Son chapiteau, décrit spécialement ci-après, est orné de volutes dans lesquelles on a prétendu voir une imitation de la coiffure des dames grecques. La naissance de l'ordre ionique paraît remonter à quinze cents ans avant l'ère chrétienne (*).

(*) J'ai adopté pour cet ordre la base attique, parce qu'elle semble être aujourd'hui d'un usage plus général que celle qui appartient plus en propre

Digitized by Google

Les cannelures de la colonne sont au nombre de 24, demi-circulaires, séparées par une côte du tiers de leur diamètre. La diminution sous l'astragale est d'un septième. L'entablement peut être orné de candélabres, oves, rinceaux et autres accessoires.

## *Proportions en hauteur.*

Le piédestal a $5\frac{1}{3}$, la colonne 18 et l'entablement 4.

*Piédestal* = 5,333.

| | | |
|---|---|---|
| Base = 0,550. . . . . | Socle. . . . . | 0,250 |
| | Filet. . . . . | 0,025 |
| | Cimaise. . . . . | 0,200 |
| | Baguette. . . . . | 0,050 |
| | Filet. . . . . | 0,025 |
| Dé = 4,283. | | |
| Corniche = 0,500. . . | Filet. . . . . | 0,033 |
| | Baguette. . . . . | 0,067 |
| | Quart de rond. . . . . | 0,125 |
| | Larmier. . . . . | 0,175 |
| | Talon. . . . . | 0,067 |
| | Filet. . . . . | 0,033 |

*Colonne* = 18.

| | | |
|---|---|---|
| Base = 1. . . . . | Plinthe. . . . . | 0,300 |
| | Gros tore. . . . . | 0,250 |
| | Listel. . . . . | 0,050 |
| | Scotie. . . . . | 0,150 |
| | Listel. . . . . | 0,050 |
| | Tore supérieur. . . . . | 0,200 |

---

à l'ordre ionique. Quelques architectes l'ont également appliquée à l'ordre composite ou même au corinthien, comme on le voit au palais de la Bourse. Elle convient surtout, par sa gravité, aux décorations extérieures et monumentales.

Digitized by Google

| | | |
|---|---|---|
| Fût = 16,4. . . . . | Ceinture inférieure. . . . . | 0,100 |
| | Congé. . . . . | 0,100 |
| | Vif de la colonne. . . . . | 16,050 |
| | Ceinture de l'astragale. . . . . | 0,050 |
| | Astragale. . . . . | 0,100 |
| Chapiteau = 0,6. . . | Oves. . . . . | 0,222 |
| | Face continue. . . . . | 0,167 |
| | Listel. . . . . | 0,050 |
| | Talon. . . . . | 0,111 |
| | Filet. . . . . | 0,050 |

*Entablement* = 4.

| | | |
|---|---|---|
| Architrave = 1,2. . . | Première face. . . . . | 0,250 |
| | Deuxième face. . . . . | 0,300 |
| | Troisième face. . . . . | 0,400 |
| | Talon. . . . . | 0,150 |
| | Réglet. . . . . | 0,100 |
| Frise = 1,2. | | |
| Corniche = 1,6. . . . | Talon. . . . . | 0,150 |
| | Denticules. . . . . | 0,275 |
| | La bande qui les supporte dépasse inférieurement de. . . | 0,050 |
| | Filet. . . . . | 0,050 |
| | Baguette. . . . . | 0,075 |
| | Quart de rond. . . . . | 0,200 |
| | Larmier. . . . . | 0,350 |
| | Talon. . . . . | 0,100 |
| | Listel. . . . . | 0,050 |
| | Grande cimaise. . . . . | 0,250 |
| | Réglet. . . . . | 0,100 |

## *Proportions en largeur.*

Le dé, la plinthe et le diamètre du gros tore ont $2^{mod},8$, c'est-à-dire qu'ils débordent de 0,4 sur le fût de la colonne.

Digitized by Google

Dans le piédestal, le socle saillit sur le dé, de $0^{m},4$; le filet au-dessus, de 0,375; la baguette, de 0,1; le filet de la baguette, de 0,05; le quart de rond, de 0,2; le larmier, de 0,4; le filet supérieur, de 0,5.

Dans la colonne, le filet au-dessus du gros tore a pour saillie sur le fût 0,25; le fond de la scotie 0,1; le filet en quart de rond 0,15; le tore supérieur 0,25; la ceinture 0,1. La ceinture de l'astragale déborde sur le fût, réduit d'un septième, de 0,1, et l'astragale de 0,143. Le talon et le réglet qui s'appuient sur le listel des volutes ont leurs projections horizontales quadrangulaires; en projections verticales, la base du talon s'aligne sur le fût du bas de la colonne, c'est-à-dire qu'elle déborde d'un module sur l'axe. La saillie du réglet sur l'axe égale 1,275.

Dans l'entablement, la frise s'aligne avec le vif de la colonne sous l'astragale, ainsi que la première face de l'astragale : les trois faces de l'architrave sont en saillie de 0,05 l'une sur l'autre. Le réglet déborde de 0,25 sur la frise. Le talon est en retraite de 0,025 sous le réglet et déborde de la même quantité sur la troisième face.

Chacun des deux talons de la corniche est pareillement en retraite ou en saillie de 0,025, et le débordement sur la frise égale : 0,164 pour le fond des denticules; 0,4 pour le filet; 0,45 pour la baguette; 0,6 pour le quart de rond des oves; 1,2 pour le larmier; 1,3 pour le listel; 1,6 pour le réglet. On voit, par cette dernière valeur, que la saillie de la corniche sur la frise est égale à sa hauteur.

### *Du chapiteau.*

Deux faces du chapiteau, celle qui est dirigée vers le dehors et son opposée vers l'édifice, portent des volutes, d'un même développement et placées symétriquement par rapport à l'axe de la colonne. Mais la face extérieure est la

Digitized by Google

seule que l'on soit dans l'usage de considérer, l'autre n'ayant que peu d'importance pour la décoration de l'ordre. Les deux faces sont reliées latéralement par des coussinets, qui forment le profil du chapiteau. La figure qui représente une colonne de coin suppose donc le plan vertical de projection parallèle à la face principale de l'édifice, circonstance qui était indifférente pour les ordres précédents. Du reste, les moulures de l'entablement ont toujours les mêmes saillies parallèlement et perpendiculairement à ce plan de projection.

Chaque volute est un prolongement du listel, cylindrique en dehors et arrondi sur ses angles, se contournant en spirale jusqu'à la circonférence d'un cercle qui est l'œil de la volute. On prend pour centre de ce cercle un point situé verticalement au-dessous du point où le listel se sépare du talon, et à 0,5 au-dessous; en projection verticale, ce point est donc distant d'un module de l'axe de la colonne. On prend le rayon du même cercle égal à 0,056 : on y inscrit (*fig.* 180, *Pl.* XXV), sous des inclinaisons de 45 degrés, un carré et deux diamètres; on divise les portions des diamètres interceptées par les côtés du carré en 12 parties égales, que l'on numérote de la manière indiquée dans la figure. Du n° 1, comme centre, on décrit le premier arc extérieur *ab*; du n° 2, le second arc *bc*; et ainsi de suite. Les arcs intérieurs *a'b'*, *b'c'*, . . ., séparés des précédents par l'épaisseur du listel, qui est de 0,05, se décrivent semblablement, mais en prenant pour les centres successifs des points situés sur les mêmes diamètres, en deçà des premiers, à la distance d'un quart de chacune des 12 parties dans lesquelles on a divisé ces lignes.

On trouve, en conséquence, que la plus grande distance du contour extérieur de la volute à l'axe de la colonne, en projection verticale, est 1,444; que sa plus petite distance à l'axe est 0,669; que, par suite, la plus grande largeur de la

Digitized by Google

volute, dans le sens horizontal, diffère peu de 0,775. Sa plus grande hauteur verticale est d'environ 0,887.

La largeur du listel, à sa surface cylindrique contournée, peut être prise égale à 0,1 ; il est en retraite de 0,025 sous la base du tailloir, de sorte que le plan de la face extérieure de la volute est distant de l'axe de la colonne de 0,975. Les oves du quart de rond sont en saillie de 1,225 sur cet axe.

Les coussinets sont des espèces de balustres, couchés horizontalement, unis entre eux par une ceinture : ils se rattachent par un galbe en forme de talon, aux premières spires des volutes. Dans leurs parties moyennes ils s'arrondissent et se terminent en quart de rond, près de la ceinture. Du reste, leurs dimensions et leurs formes ne sont pas déterminées géométriquement.

Les ornements et même la disposition du chapiteau sont variables. Les proportions des volutes ne doivent jamais s'écarter notablement de celles qui ont été indiquées ; mais la largeur du listel peut être plus considérable, surtout à l'origine de la spirale. On donne quelquefois au tailloir sa forme primitive dans les monuments grecs, analogue à celle du chapiteau corinthien ; dans ce cas, les volutes ne sont plus dans un même plan, et s'inclinent en avant dans le sens des côtés du polygone. Enfin, on substitue aux oves des enroulements qui se découpent en feuilles, des figurines, etc.

### ORDRE CORINTHIEN. (*Pl.* XXXVI.)

**280.** Voici le plus brillant et le plus riche des cinq ordres, l'apanage des édifices du rang le plus élevé, dans l'architecture antique ou moderne. La colonnade du Louvre, les péristyles du Panthéon, de la Bourse ou de la Madeleine, témoignent en particulier de sa splendeur. Son fût élancé se termine par un bouquet de rameaux qui le

Digitized by Google

vivifient singulièrement, et ce caractère particulier de son chapiteau aurait une origine assez curieuse, s'il fallait en croire la chronique. On rapporte que l'architecte Callimachus, habitant de Corinthe, aperçut un jour sur la tombe d'une jeune fille une corbeille environnée de feuilles d'acanthe et recouverte d'une large tuile. La plante, parvenue à la hauteur de la tuile, s'était recourbée en forme de volute, et de cette disposition due au hasard résultait un effet tellement harmonieux, que l'artiste chercha à la reproduire dans la décoration des édifices, en y ajoutant seulement la symétrie et la régularité.

Le fût est taillé de vingt-quatre cannelures en demi-cercles, avec une côte du tiers de leur diamètre. Souvent ces cannelures sont remplies jusqu'au tiers de leur hauteur par une baguette cylindrique. La diminution du rayon sous l'astragale est seulement d'un huitième. La corniche est rehaussée de modillons, et les faces de l'entablement portent des sculptures plus ou moins riches, selon l'importance de l'édifice.

### *Proportions en hauteur.*

Le piédestal a 6 modules, la colonne 20, et l'entablement $4\frac{2}{3}$.

*Piédestal* = 6.

| | | |
|---|---|---|
| Base = 0,758. . . . | Socle. . . . . | 0,233 |
| | Tore, ou tondin. . . . . | 0,175 |
| | Filet. . . . . | 0,058 |
| | Doucine. . . . . | 0,204 |
| | Baguette. . . . . | 0,058 |
| | Filet. . . . . | 0,030 |

Digitized by Google

| | | |
|---|---|---|
| Dé = 4,775. . . . . | Grande face avec ses congés. . | 4,495 |
| | Filet de l'astragale. . . . . | 0,029 |
| | Astragale. . . . . | 0,058 |
| | Frise et son congé. . . . . | 0,193 |
| Corniche = 0,467. . . | Filet inférieur. . . . . | 0,029 |
| | Baguette. . . . . | 0,058 |
| | Doucine. . . . . | 0,088 |
| | Larmier. . . . . | 0,175 |
| | Talon. . . . . | 0,078 |
| | Filet supérieur. . . . . | 0,039 |

*Colonne* = 20.

| | | |
|---|---|---|
| Base = 0,992. . . . . | Plinthe. . . . . | 0,292 |
| | Tore inférieur. . . . . | 0,233 |
| | Filet au-dessus. . . . . | 0,029 |
| | Scotie. . . . . | 0,102 |
| | Filet. . . . . | 0,015 |
| | Les deux baguettes. . . . . | 0,058 |
| | Filet. . . . . | 0,015 |
| | Scotie supérieure. . . . . | 0,073 |
| | Filet. . . . . | 0,029 |
| | Tore supérieur. . . . . | 0,146 |
| Fût = 16,675. . . . | Ceinture inférieure. . . . . | 0,088 |
| | Congé. . . . . | 0,108 |
| | Vif de la colonne. . . . . | 16,304 |
| | Ceinture de l'astragale. . . . | 0,058 |
| | Astragale. . . . . | 0,117 |
| Chapiteau = 2,333. . | Premier rang de feuilles. . . . | 0,671 |
| | Deuxième rang ou grandes feuilles. . . . . | 0,671 |
| | Troisième rang ou caulicoles. | 0,292 |
| | Grandes volutes. . . . . | 0,408 |
| | Base du tailloir. . . . . | 0,175 |
| | Filet. . . . . | 0,029 |
| | Quart de rond. . . . . | 0,087 |



Digitized by Google

Les petites volutes s'alignent par le bas avec les grandes et ont seulement 0,321 de hauteur; la différence 0,187 est l'épaisseur de la lèvre du vase. Le revers des caulicoles a 0,117, le revers des grandes feuilles, 0,233, et celui des premières feuilles, 0,204. L'intervalle 0,175 des grandes feuilles au revers des caulicoles est pour le culot, d'où jaillit une tigette qui porte la rosace du tailloir.

*Entablement* = 4,667.

| | | |
|---|---|---|
| Architrave = 1,4. . . | Petite face. . . . . | 0,233 |
| | Baguette. . . . . | 0,058 |
| | Deuxième face. . . . . | 0,292 |
| | Talon. . . . . | 0,117 |
| | Grande face. . . . . | 0,409 |
| | Baguette. . . . . | 0,058 |
| | Talon. . . . . | 0,175 |
| | Réglet. . . . . | 0,058 |
| Frise = 1,4. | | |
| Corniche = 1,867. . . | Baguette. . . . . | 0,029 |
| | Talon. . . . . | 0,175 |
| | Filet. . . . . | 0,029 |
| | Larmier denticulaire. . . . . | 0,233 |
| | Filet. . . . . | 0,026 |
| | Baguette. . . . . | 0,052 |
| | Quart de rond. . . . . | 0,233 |
| | Face des modillons. . . . . | 0,312 |
| | Talon. . . . . | 0,078 |
| | Larmier. . . . . | 0,233 |
| | Petite cimaise. . . . . | 0,088 |
| | Filet. . . . . | 0,029 |
| | Cimaise. . . . . | 0,292 |
| | Réglet. . . . . | 0,058 |

Digitized by Google

*Proportions en largeur.*

Le dé, la plinthe et le diamètre du gros tore ont 2,8.

Dans le piédestal, la saillie sur le dé est : pour le soclé et le tondin, ou tore de la base, 0,438; pour le filet au-dessus, 0,321; pour la baguette, 0,088; pour le filet, 0,058; les deux baguettes au-dessus du dé et leurs filets s'alignent sur les précédents; pour la doucine, 0,204; pour le larmier, 0,350; pour le réglet, 0,438. Le dé et la frise se terminent en congé sur les filets.

Dans la colonne, la saillie sur le fût est : pour le filet au-dessus du gros tore, 0,283; pour le fond de la grande scotie, 0,167; pour les baguettes, 0,225; pour leur filet, 0,196; pour le fond de la petite scotie, 0,108; pour le filet au-dessus, 0,138; pour le tore supérieur, 0,196; pour la ceinture, 0,108.

Sur le fût, dont le diamètre est réduit d'un huitième, dans le haut de la colonne, l'astragale déborde de 0,146, et sa ceinture de 0,088.

Quant au chapiteau, voyez ci-après.

Dans l'entablement, chaque talon est en retraite de 0,029 sous la face ou le filet adjacent. La frise et la première face de l'architrave s'alignent sur le fût sous l'astragale. Sur cet alignement, la deuxième face déborde de 0,029; la troisième de 0,117; la baguette de 0,146; le réglet de 0,292; la baguette qui surmonte la frise, de 0,029; le filet des denticules de 0,155; le larmier denticulaire de 0,311; le filet au-dessus de 0,350; la baguette de 0,389; la face des modillons de 0,583; les modillons eux-mêmes de 1,352; le larmier de 1,440; le filet de la petite cimaise de 1,555; le réglet de 1,867.

La largeur ainsi que l'épaisseur des denticules est égale aux deux treizièmes de la distance du larmier à l'axe de la colonne, c'est-à-dire égale à 0,18246. Les métochés, ou les



Digitized by Google

intervalles qui les sépare sur le fond, n'ont que la moitié de cette largeur, savoir, 0,09123. Le premier denticule forme l'angle du larmier, de manière que le milieu du cinquième est d'aplomb avec l'axe d'une colonne de coin. C'est toujours un denticule, et non un métoché, qui correspond à l'axe d'une colonne. Au-dessus est placé un modillon.

*Du chapiteau.*

Le tailloir est de forme étoilée et s'obtient, dans sa partie inférieure, de la manière suivante. On décrit un carré ayant 2,8 de côté : des perpendiculaires aux diagonales, menées symétriquement par ses quatre sommets et longues de 0,233, déterminent la largeur ou l'échancrure des pointes. Par chaque sommet, une droite tracée extérieurement et inclinée de 60 degrés sur un côté du carré rencontre le prolongement du diamètre perpendiculaire à ce côté en un point qui est le centre de la courbure du tailloir : le filet au-dessus déborde la base du tailloir, dans tout son parcours, de 0,078 et le quart de rond de 0,155.

La saillie des premières feuilles sur le vase, ou sur le fût prolongé de la colonne, dont on suppose le diamètre le même qu'au-dessous de l'astragale, est 0,058 à leurs bases et 0,350 à leur courbure la plus extérieure : par une continuation de cette courbure, elles rentrent sur elles-mêmes de 0,117. La saillie des grandes feuilles sur le fût prolongé égale, au-dessus des premières feuilles, 0,058, à leurs parties culminantes, 0,117, et à leur courbure extérieure, 0,525 ; elles rentrent sur elles-mêmes de 0,117. Leur largeur, dans les parties culminantes, égale 0,233.

Les tigettes prennent naissance entre les grandes feuilles du milieu et celles qui correspondent aux sommets du tailloir. Les caulicoles se règlent en saillie et en largeur sur les grandes volutes. Celles-ci s'alignent au dehors sur

Digitized by Google

l'échancrure du tailloir, débordent sur ses côtés de 0,117 et s'élargissent dans leurs contours inférieurs. Les petites volutes débordent le tailloir, au centre de sa courbure, de 0,350, et à leur réunion elles ont de face 0,117. Elles s'effacent diagonalement dès leur naissance de la tigette, de même que les grandes volutes.

Le corps du vase, qui sert de fond, a dans sa partie moyenne même diamètre que le haut du fût de la colonne; mais il s'arrondit au-dessus de l'astragale et rentre sur lui-même de 0,078; il s'élargit au contraire dans le haut par un contour gracieux jusqu'à la lèvre qui déborde de 0,092 et se profile en quart de cercle.

Les feuilles du chapiteau, qui étaient d'acanthe dans leur origine, sont généralement aujourd'hui celles d'olivier. Elles sont divisées en masses de refend, subdivisées elles-mêmes en cinq feuilles. Les talons de l'entablement peuvent être ornés de rais de cœur ou de feuilles d'acanthe; le quart de rond porte des oves; on distribue des enroulements, ou d'autres sculptures plus ou moins riches, sur la frise de l'entablement, et des griffons sur la cimaise.

### ORDRE COMPOSITE. (*Pl.* XXXVII.)

281. L'ordre composite est aussi remarquable que le précédent par le luxe de sa décoration; mais on le trouve moins beau, parce qu'il manque d'homogénéité et ne se montre pas comme le premier jet d'une pensée simple et poétique. Il participe de l'ionique et du corinthien. C'est à Rome qu'il a pris naissance, et l'on en trouve l'origine dans les colonnes de l'arc de Titus; c'est aussi dans cette capitale que les monuments de cet ordre sont les plus nombreux.

Les proportions du fût de la colonne, ses cannelures, la diminution de son rayon au-dessous de l'astragale, sont les mêmes que dans l'ordre corinthien. Il en est ainsi, pour

Digitized by Google

les proportions en hauteur, des trois grandes divisions de l'ordre entier, comme on le voit ci-après.

## *Proportions en hauteur.*

Le piédestal a 6 modules, la colonne 20, l'entablement $4\frac{2}{3}$.

### *Piédestal* = 6.

| | | |
|---|---|---|
| Base = 0,7 | Socle | 0,205 |
| | Tore | 0,175 |
| | Filet | 0,058 |
| | Talon renversé | 0,175 |
| | Baguette | 0,058 |
| | Filet | 0,029 |
| Dé = 4,833 | Grande face avec son congé | 4,454 |
| | Filet de l'astragale | 0,029 |
| | Astragale | 0,058 |
| | Frise | 0,292 |
| Corniche = 0,467 | Cavet | 0,058 |
| | Filet au-dessus | 0,029 |
| | Quart de rond | 0,088 |
| | Larmier | 0,175 |
| | Talon | 0,076 |
| | Réglet | 0,039 |

### *Colonne* = 20.

| | | |
|---|---|---|
| Base = 0,990 | Plinthe | 0,292 |
| | Tore inférieur | 0,263 |
| | Baguette | 0,058 |
| | Filet | 0,029 |
| | Scotie | 0,117 |
| | Filet au-dessus | 0,058 |
| | Tore supérieur | 0,175 |

Digitized by Google

| | | |
|---|---|---|
| Fût = 16,675. . . . | Baguette inférieure. . . . . | 0,088 |
| | Ceinture. . . . . | 0,088 |
| | Congé. . . . . | 0,108 |
| | Vif de la colonne. . . . . | 16,216 |
| | Ceinture de l'astragale. . . . . | 0,058 |
| | Astragale. . . . . | 0,117 |
| Chapiteau = 2,333. . | Premières feuilles. . . . . | 0,671 |
| | Deuxièmes ou grandes feuilles. | 0,671 |
| | Du dessus des grandes feuilles au filet. . . . . | 0,292 |
| | Filet. . . . . | 0,039 |
| | Baguette formant le revers du vase. . . . . | 0,078 |
| | Quart de rond des oves. . . . | 0,175 |
| | Canal au-dessous du tailloir. . | 0,058 |
| | Base du tailloir. . . . . | 0,204 |
| | Filet. . . . . | 0,058 |
| | Quart de rond . . . . . | 0,087 |

Le revers des feuilles du premier ou du deuxième rang égale 0,175.

*Entablement* = 4,667.

| | | |
|---|---|---|
| Architrave = 1,4. . . | Première face. . . . . | 0,390 |
| | Talon. . . . . | 0,077 |
| | Grande face. . . . . | 0,507 |
| | Baguette. . . . . | 0,039 |
| | Quart de rond. . . . . | 0,155 |
| | Cavet. . . . . | 0,155 |
| | Réglet. . . . . | 0,077 |
| Frise = 1,4. | | |

Digitized by Google

| | | |
|---|---|---|
| Corniche = 1,867. | Filet. . . . . | 0,026 |
| | Baguette. . . . . | 0,052 |
| | Quart de rond. . . . . | 0,195 |
| | Fond des modillons. . . . . | 0,195 |
| | Talon. . . . . | 0,077 |
| | Face des doubles modillons. . . | 0,272 |
| | Baguette. . . . . | 0,039 |
| | Quart de rond. . . . . | 0,077 |
| | Larmier. . . . . | 0,390 |
| | Quart de rond. . . . . | 0,104 |
| | Filet. . . . . | 0,052 |
| | Cimaise. . . . . | 0,311 |
| | Réglet. . . . . | 0,077 |

## *Proportions en largeur.*

Le dé et la frise du piédestal, la plinthe et le diamètre du gros tore de la colonne ont, comme dans les deux ordres précédents, 2,8.

Dans le piédestal, la saillie sur le dé est : pour le socle et le tondin, 1,4; pour le filet au-dessus, 0,350; pour la baguette au-dessus du talon, 0,117; pour le filet au-dessus, 0,380; pour la baguette au-dessous de la frise, 0,087, et pour son filet au-dessous, 0,058; pour le filet au-dessous du quart de rond, 0,079; pour le quart de rond, 0,108; pour le larmier, 0,313; pour le listel, 0,4, d'où il suit que le listel s'aligne sur le socle.

Dans la colonne, la saillie sur le fût est : pour la baguette au-dessous du gros tore, 0,283; pour le filet au-dessus, 0,225; pour le fond de la scotie, 0,108; pour le filet au-dessous du tore supérieur, 0,137; pour le tore supérieur, 0,225; pour la baguette au-dessus, 0,167; pour la ceinture, 0,108.

Les saillies de l'astragale et de sa ceinture sont celles de l'ordre corinthien, et le chapiteau est décrit ci-après.

Digitized by Google

Dans l'entablement, la frise et la première face de l'architrave s'alignent sur le fût de la colonne au-dessous de l'astragale. Sur cet alignement, les saillies égalent : pour la deuxième face de l'architrave, 0,155 ; pour la baguette au-dessus, 0,195 ; pour le quart de rond de l'architrave, 0,210 ; pour le cavet, 0,225 ; pour le réglet, 0,311 ; pour le filet de la frise, 0,058 ; pour la baguette au-dessus, 0,062 ; pour le quart de rond du bas de la corniche, 0,272 ; pour la deuxième face des modillons, 0,758 ; pour la première, ou celle des doubles modillons, 0,817 ; pour le fond des mêmes modillons, 0,4 ; pour le quart de rond sous le larmier, 0,933 ; pour le larmier, 1,4 ; pour le filet sous la cimaise, 1,517 ; pour le réglet, 1,867, hauteur de la corniche.

Le front, ou la face extérieure des doubles modillons, est large de 0,428 ; le front des simples modillons a 0,321. Le quart de rond sous le larmier doit s'arrondir sur lui-même par le haut, à la manière des Grecs.

### *Du chapiteau.*

Le tailloir et ses échancrures ont la même forme et les mêmes dimensions que dans le chapiteau de l'ordre corinthien ; mais la saillie du quart de rond sur la base du tailloir est seulement de 0,146 ; la face du filet divise cette saillie en parties égales. Les saillies sur la ligne du fût au-dessous de l'astragale sont : pour le fleuron du tailloir, 0,633 ; pour la queue de rond des oves, 0,4 ; pour la baguette au-dessous des oves, 0,204 ; pour le filet qui borde le vase sous la baguette, 0,175. A partir du filet, le vase doit rentrer vers le fût, en se contournant légèrement, de sorte que la saillie au-dessus des petites feuilles se trouve réduite à 0,058.

Les volutes, prises diagonalement, ont 0,933 de saillie

Digitized by Google

sur le fût et 0,771 de largeur dans le sens vertical ; elles effleurent dans leurs contours la baguette au-dessus du vase sous l'ove. Elles prennent naissance sur le quart de rond, comme sortant de chaque côté du fleuron, lequel doit avoir 0,467 de face par le haut. Leur seconde révolution arrive au niveau du quart de rond ; le centre de l'œil, situé au droit de la baguette, a pour saillie sur le fût 0,525. Leur face, sous l'échancrure du tailloir, a 0,233, et au-dessus des grandes feuilles, 0,389.

Le quart de rond du chapiteau est taillé de trois oves, au droit du centre des cannelures. Elles sont reliées aux volutes par des gousses. La baguette est taillée d'olives et d'amandes ; les intervalles des contours des volutes portent des feuilles d'ornement.

---

## NOTIONS COMPLÉMENTAIRES.

### *Des entre-colonnements, des arcades, des pilastres et des frontons.*

282. Les *entre-colonnements*, ou les espaces qui séparent les colonnes sur un péristyle, sont variables selon le caractère de l'ordonnance ou certaines circonstances locales. Dans une ordonnance régulière, on leur donne les valeurs suivantes :

L'entre-colonnement toscan, d'axe en axe, a 8 modules que l'on réduit souvent à 6 ; l'entre-colonnement dorique en a $7\frac{1}{2}$ ; l'ionique 7 ; le corinthien ou le composite $6\frac{2}{3}$.

Mais l'intervalle est plus considérable pour deux colonnes adossées à un mur ou engagées dans son épaisseur par le tiers ou le quart de leur diamètre, et composant avec une porte en arcade un portique simple.

Une *arcade* est un arc, ordinairement à plein cintre, qui s'appuie sur des pieds-droits, ou quelquefois sur des co-

Digitized by Google

lonnes. On entend aussi par ce mot l'espace total circonscrit par l'arc et les pieds-droits. L'*archivolte* d'une arcade consiste dans le bandeau, simple ou composé, qui en décrit le cintre, à partir des *impostes*, c'est-à-dire des têtes des pieds-droits; il est placé à la surface extérieure des voussoirs.

Les ornements de l'archivolte participent de la simplicité ou de la richesse de l'ordonnance de l'édifice. Ses faces se multiplient comme celles de l'architrave, et ont les mêmes moulures. Ainsi l'archivolte toscan n'a qu'un bandeau simple, le dorique en a deux, l'ionique et le corinthien en ont trois. A la clef de voûte on place une agrafe ou console, décorée quelquefois d'une figurine.

Les divisions plus ou moins nombreuses de l'imposte sont pareillement en rapport avec le caractère de l'ordre. Ce n'est qu'une plinthe sans moulure dans les ordonnances simples et graves, tandis qu'on lui donne, dans les ordonnances riches, un larmier, une frise et des profils.

Une arcade doit avoir en hauteur, depuis la base de l'ouverture jusqu'au sommet du cintre, le double de sa largeur.

Les *chambranles*, ou les bandeaux dont on entoure les ouvertures des portes, des fenêtres, des cheminées, sont comparables aux archivoltes et susceptibles des mêmes variétés dans leur décoration.

Les *pilastres* pourraient être définis des *colonnes en bas-reliefs*: ce sont des montants rectangulaires en saillie sur la façade d'un édifice, et donnant l'idée de colonnes carrées engagées dans le mur par la plus grande partie de leur épaisseur. Leurs proportions et leurs moulures sont analogues à celles de l'ordre qu'ils sont destinés à représenter ou à remplacer. Ils conservent une largeur constante des bases aux chapiteaux; cependant des pilastres placés en

Digitized by Google

correspondance avec des colonnes, et supportant le même entablement, subissent dans leur largeur la même diminution que les fûts dans leur diamètre.

Le chapiteau ionique est assez rarement employé dans les pilastres : on lui substitue les moulures de l'ordre dorique.

La saillie d'un pilastre sur le mur varie du sixième au douzième de sa largeur; ses cannelures sont ordinairement au nombre de sept ou de neuf, leur nombre devant toujours être impair.

Un *fronton* est une forme triangulaire qui couronne l'entablement d'un ordre, et dont la destination est de donner à la façade de l'édifice plus d'éclat et de majesté. La hauteur du triangle, moindre dans l'ordre dorique que dans l'ionique et le corinthien, peut varier du cinquième au neuvième de la base. Il surmonte généralement un portique placé au centre de la façade.

Il est indispensable de remarquer comment les moulures de la corniche se continuent ou s'interrompent pour former le contour d'un fronton. Celles de ces moulures qui sont inférieures à la grande cimaise, ou au cavet dans l'ordre dorique, se prolongent sans interruption en ligne horizontale, et déterminent la base; elles se répètent néanmoins sur les pentes intérieures du triangle. La cimaise et le réglet se relèvent au contraire, sans se prolonger à la base. D'ailleurs, la corniche inclinée du fronton se profile tout entière comme celle de l'entablement, c'est-à-dire que deux coupes faites perpendiculairement aux moulures, dans l'une et dans l'autre, seraient égales. Nous tirons de là cette conséquence géométrique, que la surface du fond, ou le *tympan*, se trouve d'aplomb sur la frise. Observons cependant qu'il est d'usage de conserver aux denticules de la corniche inclinée leur direction verticale.

La surface du tympan reçoit des bas-reliefs, qui sont

Digitized by Google

quelquefois les attributs allégoriques de la destination d'un monument; et il peut arriver que ces œuvres d'art jouent un rôle important dans la décoration du frontispice.

### *Du galbe des fûts de colonne.*

**283.** Nous avons dit (176) que les fûts de colonne, cylindriques jusqu'au tiers de leur hauteur, prennent ensuite une forme conique; mais, afin d'éviter les solutions de continuité, on est convenu de décomposer la seconde partie de leurs surfaces en plusieurs troncs de cône successifs, et de les galber de la manière suivante :

Soient (*fig.* 181, *Pl.* XXV) *ab* le diamètre du fût au tiers de la hauteur, et *cd* le diamètre réduit sous l'astragale. Sur le diamètre *ab* on décrit un demi-cercle, et l'on abaisse la verticale *cg*, rencontrant la circonférence en un certain point *h*. On divise *cg* et l'arc *ah* chacun en six parties égales; par les divisions de l'arc on fait passer des verticales, et par les divisions de *cg*, des horizontales; les deux systèmes de droites se coupent respectivement en une suite de points qu'on joint par les nouvelles droites *am*, *mn*, *np*,.... Celles-ci sont les génératrices des troncs de cône dont se compose le galbe, depuis *ab* jusqu'à *cd*. Leur ensemble a l'apparence d'une courbe, dont la courbure est d'ailleurs peu sensible, surtout à la base.

Ce procédé s'applique aux colonnes de tous les ordres.

FIN.

Digitized by Google

Digitized by Google

# TERMES TECHNIQUES

EMPLOYÉS DANS LES ÉLÉMENTS DE PERSPECTIVE LINÉAIRE.

INDICATION DES PAGES OU ILS SONT EXPLIQUÉS.


| | Pages. |
|---|---|
| Axe de perspective | 3 |
| Axe des coordonnées | 117 |
| Centre de perspective | 3 |
| Champ perspectif d'un tableau | 20 |
| Cône perspectif d'une courbe | 37 |
| Cônes enveloppes (méthode des) | 217 |
| Construction géométrale | 126 |
| Coordonnées aériennes ou perspectives | 117 |
| Direction d'une droite par sa déclinaison et son inclinaison | 128 |
| Division perspective d'une droite | 137 |
| Enveloppes perspectives (méthode des) | 217 |
| Fuyantes (lignes) | 10 |
| Imaginaire (perspective) | 12 |
| Plan central | 3 |
| Plan d'horizon perspectif | 3 |
| Plan d'horizon visuel | 29 |
| Plan géométral | 126 |
| Plan normal | 3 |
| Plan perspectif d'une droite | 7 |
| Plans coordonnés | 117 |
| Point accidentel d'une droite | 3 |
| Point de vue | 2 |
| Points de désinence d'une surface courbe | 56 |
| Points de distance | 4 |
| Points culminants ou latéraux de la perspective d'une courbe | 38 |
| Points culminants d'une surface courbe | 48 |
| Points principaux d'une courbe ou d'une surface | 126 |
| Rapports de déclinaison ou d'inclinaison | 128 |


Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

FA6406.2
Elements de perspective lineaire.
Fine Arts Library AZ86066
3 2044 034 239 525

Digitized by Google